

研究報告

群の生成系としての音程スケール  
INTERVAL SCALE AS GROUP GENERATORS

田中 翼, 古川 聖

Tsubasa TANAKA, Kiyoshi FURUKAWA

東京藝術大学

Tokyo University of the Arts

概要

本稿の目的は、音階の概念と対になる「音程スケール」という概念を提案することである。通常、音階を指定することは、出現しうる音高とそうでない音高を定めることを意味する。このとき、出現しうる二つの音高の間には音程が生じるが、それは音高を指定した結果、付随的に現れるものにすぎない。ここで逆の考え方をとり、出現しうる音程とそうでない音程を先に定め、音高を二次的とするような「音階」の概念を考えてみるとどうなるだろうか？本稿ではそのような概念を「音程スケール」と名付ける。そしてその可能性を探るため、音程スケールに基づくと解釈できるような楽曲の実例を挙げ、分析する。また音程スケールが代数学における群と関連が深いことを示し、群の生成の観点からその特徴を論じる。

The purpose of this paper is to propose the concept of “interval scale,” which is related to the concept of musical scale. Specifying a scale usually means determining the pitches that can and cannot appear. When we specify a scale, the intervals between two possible pitches are also determined; however, these intervals are only the results of specifying possible pitches, and they are usually of secondary importance. Here, what if we consider the inverse concept (i.e., the concept that determines possible intervals prior to possible pitches)? We call such a concept “interval scale.” In order to explore the possibility of this concept, we highlight musical pieces that can be interpreted as being based on interval scales and analyze the pieces. Moreover, we show that interval scale is related to group, which is an algebraic concept, and discuss its features from the viewpoint of group generation.

1. 音程スケールとは

音高と音程という概念は共に、音の高さに関係する点で共通性がある。12平均律においては、ピッチクラスの

集合と音程のクラスの集合は共に  $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$  となる。これらの数字はピッチや音程を、半音単位の個数を12で割った余りによって、オクターブの違いを同一視した類を表す。

音高の  $\mathbb{Z}_{12}$  は絶対的な音の高さを、音程の  $\mathbb{Z}_{12}$  は相対的な音の高さを表すが、音の高さという共通する部分があるため、両者の扱われ方には優先度の違い、あるいはコンフリクトが存在すると考えられる。例えば記譜法においては、音高は直接音符で表記されるが、音程は音符と音符の間から間接的に読み取られることになる。これは、音高が音程よりも優先度が高く扱われていることを意味すると考えられる。また、音階や和音は通常、音高の集合として指定される。音階の各要素間には音程が生じるが、それがどのような音程かは通常明示化されず、音程はやはり二次的なものとして扱われる。音程行ベクトル (interval vector) の概念 [1] においてはピッチクラスの内包する全ての音程が問題にされるが、それは、あるピッチクラス集合が決まった後からその中の音程の構成要素が分析されるにすぎない。このように、多くの場合において、音高は音程よりも優先される傾向があると考えられる。

ただし、音程が重視される場合もある。数字付き低音における和音の扱いは、和音をピッチの集合としてとらえず、ベース音からの音程度数によって表記することで、和音の転回形の差異を表している。このケースは、音高よりも音程が優先的に表記される例となっている。数字付き低音においては、和声の機能からは解釈しにくい和音が理解しやすくなることもある。

このように音高と音程をどちらを優先させるかによって、異なる音楽の見方が得られると考えられる。そのような問題意識のもと、本稿では音楽理論の基礎である音階について、音高よりも音程を重視した「音程スケール」という概念を提案し考察する。通常、音階を指定することは、出現しうる音高とそうでない音高を定めることを意味する。このとき、出現しうる二つの音高の間には音程が付随的に生じるが、音程はあくまで二次的であり、音

高を指定することの方が優先される。我々が提案する音程スケールとは、それとは逆の考え方をとり、出現しうる音程とそうでない音程を定めるものである。 $n$  平均律における音階がクロマティックスケール  $\mathbb{Z}_n$  のある部分集合であるように、我々は  $n$  平均律における音程スケールを、クロマティックな音程スケール  $\mathbb{Z}_n$  のある部分集合として定義する。

本稿の構成は以下の通りである。2章では音程スケールに基づいていると解釈できるような楽曲の実例を挙げて分析し、この概念の有用性を示す。3章では、音程スケールの理論的側面を扱い、群と呼ばれる代数的構造との関係を示し、群論的考察から音程スケールの作曲への応用において重要な2つの定理を示す。4章では、2章で挙げる楽曲例との関連で、12音音列を含む一般の音列に対して音列操作のなす群を定義し、音列操作が音程スケールに与える影響関係について議論する。5章では結論と今後の課題を述べる。

## 2. 音程スケールに基づく楽曲例

本章では音程のスケールに基づいていると解釈できるような2つの楽曲例を取り上げ、音程スケールの作曲への応用における有用性を示す。

### 2.1. リゲティ「エチュード第二番（開放弦）」

リゲティの作品『ピアノのためのエチュード第2番「開放弦（“Cordes à vide”）」』[2]は「開放弦」というタイトルからもわかるように、完全5度音程の上下行（5と7の音程）を中心に楽曲が作られている。図1にこの曲の冒頭を示す。



図1. リゲティ「エチュード第二番」冒頭。数字は半音を単位とした音程を表す。

第2小節目の終わりまでの8分音符の旋律的音程を全て集めると  $\{5, 6, 7, 8\}$  という音程スケールが構成される。これは要素数が少なく、音程が連続しているという特徴をもつ。音程6および8は5と7にそれぞれ隣接することで、完全5度の動きを緩やかにトランスポートすることを可能にし、同じピッチクラスへの膠着を防ぐ役割を担っていると考えられる。他方、ピッチに関しては、右手パートの二つ目のスラーの終わりの時点までには全てのピッチクラスが早くも出現するため、クロマティッ

クスケール  $\mathbb{Z}_{12}$  に基づくと解釈できる。音程スケールに基づくとき、音高のスケールがクロマティックになるのは偶然ではない。なぜなら例えば7のみの音程だけでも、五度圏をたどることで全てのピッチクラスが出現しうるからである。逆に言えば、クロマティックな無調音楽であっても、実は要素数の小さい音程スケールが使用され、響きがコントロールされているケースが想定されうる。この曲はそのようなケースであり、ピッチにおいて無調であるにもかかわらずある種の協和的な響きのする楽曲が実現している。それは音程スケールのもたらした効果だととらえることができるだろう。

### 2.2. ベルク「ヴァイオリン協奏曲」の音列

柴田南雄は文献[3]において、シェーンベルクが12音技法や無調という言葉を使っておらず、「相互の関係のみに依存している12個の音による作曲の方法」と称していたことに注意を向けている。そして、12音音楽といえども調性感をも積極的に包含する可能性があり、12音音列の機械的適用を超えた未知の秩序を見いだしうるというスタンスで12音音楽を論じている。また小鍛冶邦隆は文献[4]において、調性音楽と無調音楽の接点における創作の方法を探るため、ベルクの「ヴォツェック」の分析を行っている。ここで手がかりになっているのは「調的要素」としての音程である。このように、音程の分析は無調音楽の中の調性感を理解する手がかりになると考えられる。

ここでは、12音音楽における調性感にとっての音程の重要性を良く示す例として、ベルクの「ヴァイオリン協奏曲」の12音音列をとりあげてみよう（図2）。

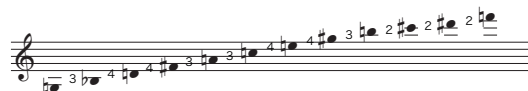


図2. ベルク「ヴァイオリン協奏曲」の12音音列。

この音列の構成法は容易に見てとれる。始めは長三度と短三度の音程が規則的に現れ、最後の三つの音程が全音となっている。これらの音程を集めた集合は  $\{2, 3, 4\}$  という音程スケールをなす。長短の三度音程や、全音の音程は、調性音楽の特徴を表す重要な音程であり、それがこの曲の調性感につながっていると考えられる。

このような音列とは対極的に、0を除く11種類全ての音程が出現する総音程音列という考え方がある。これは音程スケール  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  に基づく音列として捉え直すことができる。これによって、ピッチだけでなく音程についても全ての種類を偏りなく用い、調性感を持たないような組織化がもたらされると考えられる。いずれにしても音程スケールの概念は、無調音楽や12音音楽の響きをコントロールする原理として有用

だと考えられる。

### 3. 群論的考察

前章では実際の楽曲の背後に音程スケールを見いだした。リゲティ作品の音程スケール  $\{\bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$  やベルク作品の音程スケール  $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$  は要素数が少なく、連続しているという特徴を共有する。音程スケールの選び方は多数ある中で、このような選択はどのような意味があるのだろうか？また、音程スケールを実際に用いて音楽作品を作る場合、適切な音程スケールをどのように選択すれば良いだろうか？このような問題への対処の指針を得るため、本章では、 $n$  平均律における  $\mathbb{Z}_n$  の中での音程スケールについて数学的考察を行い、大域的な見地から音程スケールの理解を深めていく。

#### 3.1. 音程のなす群

$n$  平均律のピッチクラス集合およびピッチ間の音程のクラスの集合は共に  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$  になる。数学的には  $\mathbb{Z}_n$  は単なる要素の集合であるだけでなく、任意の2つの要素の足し算が定義された群という代数的構造を持つ（詳細は後に定義する）。しかし、 $\mathbb{Z}_n$  をピッチクラスの集合としてみたときには、群としての  $\mathbb{Z}_n$  の足し算に音楽的な意味を見いだすことは困難である。つまりピッチクラス A とピッチクラス B を足した結果が別のピッチクラスを表すというような足し算（例えば  $n = 12$  のとき、 $\bar{2} + \bar{10} = \bar{0}$ ）を考えても、そこに何の意味があるのかが解釈しにくい。他方、 $\mathbb{Z}_n$  を音程のクラスの集合としてみると、音程 A と音程 B を足すと音程 C になる（例えば3半音 + 4半音 = 7半音）というように、足し算が自然な意味をもつ。したがって群論的には、ピッチクラスの集合ではなく、音程のクラスの集合としての  $\mathbb{Z}_n$  が興味深い対象である。

#### 3.2. 巡回群と五度圏

$\mathbb{Z}_n$  は  $n$  個の要素をもち、それらのあらゆる元は  $\bar{1}$ ,  $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$ ,  $\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{3}$ ,  $\dots$ ,  $\bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1} = \overline{n-1}$  というように、 $\bar{1}$  という最小単位の音程上昇を表す一つの元を一つづつ足していくことで尽くされる。そして、 $n$  個足したとき、最初の  $\bar{0}$  という地点に戻り、循環する。このように、群  $G$  が一つの元  $g \in G$  の  $n$  個までの和の循環によって尽くされる群は位数  $n$  の巡回群と呼ばれる。そしてこの  $g$  は巡回群の生成元と呼ばれる。

一般に、生成元の取り方は  $\bar{1}$  だけとは限らない。例えば12平均律における五度圏は、完全5度音程を表す元  $\bar{7}$  によって  $\{\bar{0}, \bar{7}, \bar{2}, \bar{9}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{6}, \bar{1}, \bar{8}, \bar{3}, \bar{10}, \bar{5}, \bar{0}\}$  というように  $\mathbb{Z}_{12}$  が巡回群として逐次的に生成されていく過程と解釈できる。しかし、全音を表す音程  $\bar{2}$  を生成元に取り

うとすると、 $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$  と、偶数しか出現しないため  $\mathbb{Z}_{12}$  全体をカバーできず、生成できない。しかし、部分集合としての  $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$  はそれ自体群（部分群という）となり、 $\bar{2}$  はその生成元となっている。

#### 3.3. 五度圏の拡張としての音程スケール

このような生成は、二つ以上の元を用いて行うこともできる。すなわち、始めの基準ピッチクラスを  $\bar{0}$  として、前の音程に新たな音程のクラス  $\bar{a}_j \in \mathbb{Z}_{12}$  を足す、というふうにして音程のクラスの系列  $\{\bar{0}, \bar{a}_1, \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \dots\}$  を作っていくことで、様々な音程の系列を生み出すことができる。複数の元のときは、五度圏のような一通りの経路ではなく、複数の経路の可能性がある。その具体例がリゲティの楽曲において  $\{\bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$  の音程スケールによって生み出された図1のような旋律パターンや、ベルクの音列なのである。そして、あらゆる可能な経路のうちに出現する音程を全て集めた集合は、一つの元から生成された巡回群と同じように、ある群を生成することを示すことができる（次節以降参照）。このように、音程スケールに基づく旋律（音列）とは、逐次的に群を生成する過程そのものである。

ここで問題は、音程スケールに基づく旋律が最終的に生成する群とはどのようなものかということである。それは先にみたように  $\mathbb{Z}_n$  全体になることもあれば、出現しない音程のある、より小さな部分群になることもあるだろう。それは具体的な音程スケールの選択にかかっている。そこで次節以降では、音程スケールの選択がそこから生成される群とどのような関係にあるのかを明らかにしていく。そこで得る2つの定理は、音程スケールを用いて作曲する際に有用な知識となるだろう。

#### 3.4. 群論の基礎的概念

**定義 1** (群). 集合  $G$  の任意の元  $a, b$  に対し、ある二項演算  $ab$  が定義されており、 $ab \in G$  (演算について閉じている) とする。このとき  $G$  が群であるとは、この演算が次の三条件を満たすときにいう:

1.  $G$  の演算は結合法則を満たす。すなわち、任意の元  $a, b, c \in G$  に対して  $(ab)c = a(bc)$  が成り立つ。
2.  $G$  に単位元が存在する。すなわち、ある  $e \in G$  が存在し、任意の  $a \in G$  に対し、 $ae = ea = a$  となる。
3.  $G$  の任意の元に対して逆元が存在する。すなわち、任意の  $a \in G$  に対し、 $ab = ba = e$  となる  $b \in G$  が存在する。

$\mathbb{Z}_n$  は群の典型的な例の一つである。 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n (0 \leq a, b \leq n-1)$  とすると、 $a+b$  を  $n$  で割った余り  $c$  によ

て,  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$  という  $\mathbb{Z}_n$  の中での足し算 “+” が自然に定義できる. このとき単位元は  $\bar{0}$ ,  $\bar{a}$  の逆元は  $\overline{n-a}$  ( $\bar{n} = \bar{0}$ ) である. この逆元は  $-\bar{a}$  とも表記する.

**定義 2** (部分群, 群の位数). 群  $G$  の部分集合  $H$  がそれ自体群になっているとき  $H$  を部分群という.  $G$  の元の個数を  $G$  の位数という.

**定義 3** (巡回群, およびその生成元と位数).  $x \in G$  を  $k$  個演算 (演算を + で表記する) したものを  $x+x+\dots+x$  を  $kx$ ,  $x$  の逆元を  $k$  個演算したものを  $(-x)+(-x)+\dots+(-x)$  を  $-kx$ ,  $e$  を  $0x$  と書く. 群  $G$  のすべての元が, ある  $k \in \mathbb{Z}$  に対して  $kx$  で表せるとき,  $G$  を  $x$  で生成される巡回群といい,  $x$  を  $G$  の生成元という. このとき,  $G = \langle x \rangle$  と書く. このような  $x$  に対し  $kx = e$  となる最小の自然数  $n$  が存在するとき  $n$  を元  $x$  の位数という.

**定義 4** ( $S$  の生成する群, 群の生成系).  $G$  の部分集合  $S$  を含む最小の部分群を  $S$  の生成する部分群といい  $\langle S \rangle$  で表す.  $S$  は  $\langle S \rangle$  の生成系という.

$\langle S \rangle$  は必ず存在し, 次の  $T$  に一致する. すなわち,  $G$  の部分集合  $S$  元およびその逆元, 単位元を任意の個数足し合わせた元の集合  $T$  を次のように定義する:  $\{\epsilon_1 s_1 + \epsilon_2 s_2 + \dots + \epsilon_r s_r \mid s_j \in S, \epsilon_j = \pm 1, r = 1, 2, \dots\}$ . これらの元は  $S$  を含み, かつ  $S$  を含む任意の群に含まなければならない集合である. また, この集合が群になることはすぐに定義から確認できる. したがってこれは  $S$  を含む最小の部分群であり, 定義から  $T$  は  $\langle S \rangle$  に一致する. このように  $\langle S \rangle$  は構成的に表示できる.

### 3.5. 音楽的概念の群論的定義

**定義 5** ( $n$  平均律の音程クラス, 音程スケール). 音程に関する  $\mathbb{Z}_n$  の要素を  $n$  平均律の音程クラス (あるいは誤解がなければ単に音程) と呼ぶ. また  $\mathbb{Z}_n$  の部分集合 (ただし要素数は 1 以上) を  $n$  平均律の音程スケールと呼ぶ.

**定義 6** (音程スケールの生成する半群). ある  $n$  平均律の音程スケール  $IS_n$  の元を任意の個数足し合わせたものの集合  $\{s_1 + s_2 + \dots + s_r \mid s_j \in IS_n, r = 1, 2, \dots\}$  を  $\langle\langle IS_n \rangle\rangle$  と表記し, 音程スケール  $IS_n$  の生成する半群と呼ぶ.

半群とは, 群の定義において, 単位元および逆元を持つという条件を除外した代数的構造である. 例えば, 整数の集合  $\mathbb{Z}$  が群であるのに対し, 自然数の集合  $\mathbb{N}$  は逆元としての負の整数および単位元  $0$  を持たないため半群である.  $\langle\langle IS_n \rangle\rangle$  は, 音程スケールが生み出すことのできる音程を全て集めた集合である. 次節ではこの半群が各要素の逆元や単位元を持ち, 群になることを示す.

ここで表記上の約束事を述べておく.  $IS_n$  は  $n$  平均律

における, ある音程スケールをのこととする.  $IS_n$  は元の個数を  $i$  として  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i\}$  とも表記する. ただし  $x_j$  は  $0$  から  $n-1$  までの整数である. また  $IS_n$  のすべての元の最大公約数, すなわち  $\gcd(x_1, x_2, \dots, x_i)$  を  $d$  と表記する. ただし  $i=1$  のとき  $\gcd(x_1) = |x_1|$  とする ( $x_1$  が  $0$  または負の整数のときも含めてそのように定義).  $\langle IS_n \rangle$  が  $\mathbb{Z}_n$  に一致するとき,  $\langle IS_n \rangle$  はクロマティックであるという.

### 3.6. 補助的な命題

本節では後の論述に必要な二つの補助的命題を示す.

**補題 1.**  $\langle\langle IS_n \rangle\rangle$  は群  $\langle IS_n \rangle$  に一致する.

*Proof.* 既に述べたように  $\mathbb{Z}_n$  は巡回群である. したがって, 巡回群の定義より, 位数  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) の巡回群  $G$  の任意の元  $s$  は  $ns = e$  を満たす. また  $(n-1)s + s = ns = e$  より  $(n-1)s$  は  $s$  の逆元  $-s$  になる.  $s \in \langle\langle IS_n \rangle\rangle$  ならば  $(n-1)s \in \langle\langle IS_n \rangle\rangle$  なので,  $\langle\langle IS_n \rangle\rangle$  には  $s$  の逆元が含まれる. したがって  $\langle IS_n \rangle$  の任意の元は  $\langle\langle IS_n \rangle\rangle$  の元として書き表すことができ,  $\langle IS_n \rangle \subseteq \langle\langle IS_n \rangle\rangle$  となる. また  $\langle IS_n \rangle \supseteq \langle\langle IS_n \rangle\rangle$  は構成的な表示による定義より明らかである. したがって  $\langle IS_n \rangle = \langle\langle IS_n \rangle\rangle$  となる.  $\square$

この補題より,  $\langle\langle IS_n \rangle\rangle$  の群としての生成系は音程スケール  $IS_n$  だと考えて良い. また半群  $\langle\langle IS_n \rangle\rangle$  が群になるということは, 音楽的には, 逆元によって音程移動の後戻りができることが保証されたことを意味する.

**補題 2** (ユークリッドの補題の一般化).  $i > 0$  であり, 各  $y_j$  は整数とする. このとき,  $\gcd(y_1, y_2, \dots, y_i) = d$  ならば  $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_i y_i = d$  となるような整数の組  $a_1, a_2, \dots, a_i$  が存在する.

*Proof.* この命題は, ユークリッドの補題と呼ばれる有名な命題を一般化したものである. 数学的帰納法で命題を証明する.  $i=1$  のときは  $\gcd(y_1) = |y_1|$  より  $a_1 = 1$  または  $a_1 = -1$  とすれば命題が成り立つことがわかる. いま,  $i = k$  ( $k \leq 1$ ) のとき命題が成り立つと仮定する.  $i = k+1$  のときの命題の前提が成り立っているとすると  $\gcd(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}) = d$ . これにより,  $\gcd(y_1, y_2, \dots, y_k)$  を  $D$  とおくと,  $\gcd(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}) = \gcd(D, y_{k+1}) = d$  である. したがって  $k=2$  のときの命題により,  $AD + By_{k+1} = d$  となる整数の組  $A, B$  が存在する. また,  $i = k$  のとき命題が成り立つので,  $(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_k y_k) = D$  となる  $a_1, a_2, \dots, a_k$  がとれる. 左辺を  $AD + By_{k+1} = d$  の  $D$  に代入すると,  $A(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_k y_k) + By_{k+1} = d$  となる. こ

こでの  $y_i$  の係数をみれば,  $i = k + 1$  のとき命題が成り立っていることがわかる. 以上, 数学的帰納法により, 任意の  $i \geq 1$  に対して命題が証明された.  $\square$

### 3.7. 音程スケールに関する定理

前節で示した補題を用いて二つの重要な定理を示す. また, 第二の定理から導かれる系として,  $\langle IS_n \rangle$  がクロマティックになる条件に関わる実用上重要な帰結を示す.

**定理 1** (最大公約数による巡回群).  $\langle IS_n \rangle$  は  $IS_n$  の最大公約数  $d$  の音程クラス  $\bar{d}$  によって生成される巡回群  $\langle \bar{d} \rangle$  に一致する.

*Proof.*  $IS_n$  の全ての元は  $d$  の倍数だから  $\langle IS_n \rangle \subseteq \langle \bar{d} \rangle$  であることはすぐわかる. 次に  $\langle IS_n \rangle \supseteq \langle \bar{d} \rangle$  であることを示す. そのためには  $\bar{d} \in \langle IS_n \rangle$  であることを示せば良いが,  $IS_n$  の元  $x_1, x_2, \dots, x_i$  の最大公約数を  $d$  とすると, 補題 2 より  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_ix_i = d$  となる整数の組  $a_1, a_2, \dots, a_i$  がとれる. よって  $a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_i\bar{x}_i = \bar{d}$  となり, 左辺は  $\langle IS_n \rangle$  の構成的な表示式で表現できるから  $\bar{d} \in \langle IS_n \rangle$  が成り立つ.  $\square$

この定理は,  $\langle IS_n \rangle$  が  $\bar{d}$  によって定まり, 分類できることを示す. 例えば  $\mathbb{Z}_{14}$  において,  $\{0, 8, 10\}$  および  $\{6, 8\}$  という両音程スケールは最大公約数 2 を持ったため, 同じ  $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  という部分群の生成系であることがわかる.

**定理 2** (位数公式).  $\langle IS_n \rangle (= \langle \bar{d} \rangle)$  の位数は  $\frac{n}{\gcd(d,n)}$  である.

*Proof.*  $xd$  が  $n$  の倍数になる最小の  $x (\geq 1)$  が  $\bar{d}$  の位数である. そこで,  $xd = kn$  とおく ( $k \geq 0$ ).  $d \neq 0$  のとき,  $d = d_1 \gcd(d, n)$ ,  $n = n_1 \gcd(d, n)$  とおくと,  $x = \frac{kn_1}{d_1}$  である (ただし  $d_1$  と  $n_1$  は互いに素である).  $x$  が整数であり,  $d_1$  と  $n_1$  は互いに素であることから,  $k$  は  $d_1$  の倍数でなければならないが,  $x$  の最小性より  $k = d_1$  でなければならない. したがって,  $x = n_1 = \frac{n}{\gcd(d,n)}$ .  $d = 0$  のときは  $k = 0$  であり,  $xd = kn$  を満たす最小の  $x (\geq 1)$  は 1 である. また  $\gcd(0, n) = n$  だから公式が成り立つ.  $\square$

この定理から, 部分群がクロマティックになる条件に関する次の二つの系が導かれる.

**系 1** (クロマティックになる条件).  $\langle IS_n \rangle$  がクロマティックになる必要十分条件は  $d$  が  $n$  と互いに素であることである.

*Proof.* 定理 2 より,  $IS_n$  がクロマティック  $\iff \gcd(d, n) = 1 \iff d$  が  $n$  と互いに素.  $\square$

この系より, 特に  $n$  が素数で  $d > 0$  のときは,  $d$  と  $n$  が互いに素なので  $\langle IS_n \rangle$  が常にクロマティックになることがわかる.

**系 2** (連続する 2 元を含む場合).  $IS_n$  が連続する二つの元  $\bar{x}, \overline{x+1} (x = 0, 1, \dots, n-1)$  を含むとき,  $\langle IS_n \rangle$  はクロマティックになる.

*Proof.*  $x$  と  $x+1$  は互いに素だから  $d = 1$ . よって定理 2 から  $\langle IS_n \rangle$  の位数は  $n$  となり,  $\langle IS_n \rangle$  は  $\mathbb{Z}_n$  に一致する.  $\square$

### 3.8. 定理の意味

以上の群論的考察から, 本章の冒頭の問題に立ち戻り, 示した定理と系の意義を考えてみる.

適切な音程スケールを選択する方法については次のことがいえる. 定理 1 と系 1 から, もしピッチがクロマティックであることを志向しないならば,  $n$  と互いに素でない  $d$  を選んでその倍数から音程スケールを構成し, 最終的に  $d$  が最大公約数になるように調整すれば,  $\langle IS_n \rangle$  を一定にコントロールできる. また  $\langle IS_n \rangle$  の位数は定理 2 から計算することができる. ただしこの場合, 位数は  $n/2, n/3$  などといった極めて制限された個数のピッチクラスしか出現しない. したがって, たとえば 24 平均律の調律でありながら, 12 平均律の音しか使用しないといった不経済をもたらすため, そもそもその調律を使用する意義が弱まる恐れがある. しかし曲中のあるセクションを部分群内の音程に限定して作曲したり, 声部ごとに異なる部分群を用いるといった手法をとるなどの際には,  $n$  と互いに素でない  $d$  の使い道があるだろう. クロマティックであることを志向するならば,  $n$  と互いに素な  $d$  を選び, その倍数の中から音程を選んで音程スケールを構成し, 最終的に  $d$  が最大公約数になるように調整すればよい. 特に  $d = 1$  と設定する場合は系 2 より, 連続する二つの音程などの互いに素な二つの元をとり, その後に他のいくつかの元を加えるのが有力な構成法となるだろう.

系 1 は, ある音程スケールが, 無調音楽や 12 音音列の生成が可能であるかを判定する際に用いることのできる点で非常に重要である.

系 2 は, リゲティおよびベルクの例のような, 要素数が少なく, 連続している場合のミニマルな場合でさえ, ピッチがクロマティックになることを意味する. このような要素数が極端に少ない音程スケールは, 音程の偏りが大きくなり, 響きの個性を出すのに有用だと考えられるが, あまり要素数が少ないと単調な旋律しか生成でき

ないだろう。したがって、リゲティおよびベルクのケースは  $n = 12, d = 1$  において効率的にある種の色彩感をもつ無調音楽を生成しながら、単調になりすぎないように他の音程を付加した音程スケールの選択だった、という一つの解釈が成り立つと考えられる。

#### 4. 音列操作と音程スケール

12 音音列に対する、順行 ( $e$ )、逆行 ( $i$ )、反行 ( $r$ )、逆行の反行 ( $ir = ri$ ) という操作は、クラインの四元群という位数 4 の群と同型であることは良く知られている。この群は、巡回群ではない群の中で最も位数の小さなものである。本章では、これらの操作を  $n$  平均律における一般の音列に対する操作として改めて定義し、音列操作が、音程スケールに及ぼす影響を明らかにする。

**定義 7** (音列の音程スケール).  $n$  平均律における  $m$  音の音列を、あらゆる  $(n, m)$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ) の組み合わせについて集めた集合を  $X$ , あらゆる  $n \in \mathbb{N}$  に対する  $n$  平均律の音程スケールをすべて集めた集合を  $Y$  とする ( $X, Y$  において  $n$  が異なるが実質的に同じ元の場合は同一視する). 写像  $IS: X \rightarrow Y$  を、音列  $x \in X$  において  $x$  内の各音から次の音への音程を全て集めた集合 (ただし要素の重複をのぞく) に対応付ける写像とする。このとき、 $IS(x)$  を音列  $x$  の音程スケールと呼ぶ。

**定義 8** (順行, 逆行, 反行,  $K$ ).  $Map(X, X)$  を集合  $X$  からそれ自身への写像全体の集合とする。このとき、 $e, i, r$  を  $Map(X, X)$  の元として、 $e$  を恒等写像、 $i$  を音列  $x \in X$  をその逆行 (ただし音列の最初のピッチと最後のピッチの中間点で折り返す) に対応させる写像、 $r$  を音列  $x$  をその反行に対応させる写像と定義する。 $m_1, m_2 \in Map(X, X)$  の写像の合成を  $m_1 m_2$  とすると、 $ii = e, rr = e$  (反行の反行および逆行の逆行は順行) および、 $ir = ri$  (逆行の反行は反行の逆行に等しい) が成り立つ。これは反行、逆行の性質上明らかである。そして  $e, i, r, ir$  は写像の合成の演算に関してクラインの四元群になる ( $e$  は単位元、 $i, r$  はそれ自身が逆元であり、 $(irir = irri = iei = ii = e$  より  $ir$  の逆元はそれ自身)。この群を  $K$  と表記する。また  $K$  の元  $k$  によって音列  $x$  を写像した先を  $k \cdot x$  として、演算記号  $\cdot$  を用いて表す。

**定義 9** (音程スケールの反転  $inv, B$ ).  $Map(Y, Y)$  の元としての  $inv$  を、 $\mathbb{Z}_n$  に所属する任意の音程スケール  $y \in Y$  に対して、 $y$  の各要素音程  $\bar{y}_i \in \mathbb{Z}_n$  を  $\overline{n - y_i}$  に置き換えた音程スケールに対応付ける写像とする。また、 $E$  を  $Map(Y, Y)$  の恒等写像とする。このとき、写像  $inv$  を、音程スケールの反転とよぶ。 $inv$  は二回繰り返すと元に戻る。したがって、 $m_1, m_2 \in Map(Y, Y)$  の写像の合成を  $m_1 m_2$  とすると、 $m_1 m_2 = E$  が常に成り立ち、

$\{E, inv\}$  は写像の合成の演算に関して位数 2 の巡回群となる ( $E$  は単位元で  $inv$  の逆元はそれ自身)。この群を  $B$  と表記する。また  $B$  の元  $b$  によって音程スケール  $y$  を写像した先を  $b \circ y$  として、演算記号  $\circ$  を用いて表す。

**定義 10** ( $K$  から  $B$  への準同型写像  $f$ ). 写像  $f: K \rightarrow B$  を以下のように定義する:  $f(e) = E, f(i) = inv, f(r) = inv, f((ir)) = E$ . このとき  $f$  は準同型写像である。すなわち、任意の  $k_1, k_2 \in K$  に対し、 $f(k_1 k_2) = f(k_1) f(k_2)$  が成り立つ (このことは  $B$  における  $E$  と  $inv$  の定義からすぐに確認できる)。

**定理 3** (音列操作と音程スケールの操作の関係). 任意の音列  $x \in X$  に対して次の四つが成り立つ:

1. 順行の音程スケールはもとの音程スケールに一致する;  $IS(e \cdot x) = E \circ (IS(x))$ .
2. 反行の音程スケールはもとの音程スケールの反転に一致する;  $IS(i \cdot x) = inv \circ (IS(x))$ .
3. 逆行の音程スケールはもとの音程スケールの反転に一致する;  $IS(r \cdot x) = inv \circ (IS(x))$ .
4. 逆行の反行の音程スケールはもとの音程スケールに一致する;  $IS((ir) \cdot x) = E \circ (IS(x))$ .

すなわち、まとめると、任意の  $k \in K, x \in X$  に対して  $IS(k \cdot x) = f(k) \circ (IS(x))$  であり、次の可換図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccc} K \times X & \xrightarrow{f \times IS} & B \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \circ \\ X & \xrightarrow{IS} & Y \end{array}$$

*Proof.* まず準備として、音列  $x \in X$  に  $IS$  を施す操作を次の三つの手順、 $\alpha, \beta, \gamma$  の合成として表す: 手順 1.  $x = [x_1, x_2, \dots, x_j]$  から隣接する要素の差のリスト  $\alpha(x) = [x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_j - x_{j-1}]$  を作る。手順 2.  $\alpha(x)$  の各要素を  $\mathbb{Z}_n$  の元に変換する。これを  $z = \beta(\alpha(x)) = [x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_j - x_{j-1}]$  と表記する。手順 3. リスト  $\beta(\alpha(x))$  から重複する要素を省いた集合を作る。これを  $\gamma(z)$  とする。すなわち、 $IS(x) = \gamma(\beta(\alpha(x))) = \gamma(z)$  である。

**1. の証明:**  $IS(e \cdot x) = IS(x), E \circ (IS(x)) = IS(x)$  であるから 1. が成り立つ。

**2. の証明:**  $\alpha(i \cdot x) = [-(x_2 - x_1), -(x_3 - x_2), \dots, -(x_j - x_{j-1})]$  だから、 $\beta(\alpha(i \cdot x))$  は  $z$  の各要素をその逆元に置き換えたリストである。これを  $w$  と置くと、2. の左辺 =  $\gamma(w)$  である。2. の右辺は  $inv \circ (IS(x)) = inv \circ (\gamma(\beta(\alpha(x)))) = inv \circ (\gamma(z))$  であるが、 $inv$  は定義上、集合の各要素の逆元を集める操作であり、要素に重複があるリストに対しては最後に重複を除いた集合をとるというように定義を拡張すると、 $inv \circ (\gamma(z))$  は  $inv \circ (z) = \gamma(w)$  に一致する、したがって 2. の左辺 =

右辺が成り立つ。

**3.の証明:**  $\alpha(r \cdot x) = [x_{j-1} - x_j, x_{j-2} - x_{j-1}, \dots, x_1 - x_2] = [-(x_j - x_{j-1}), -(x_{j-1} - x_{j-2}), \dots, -(x_2 - x_1)]$  だから, 2. の証明より, これは  $\alpha(i \cdot x)$  の各要素を逆順に読んだリストである。これを  $\gamma(\beta())$  で操作して集合をとるとき, 要素の順番は無関係になる。したがって 3. の左辺  $= \gamma(\beta(\alpha(r \cdot x))) = \gamma(\beta(\alpha(i \cdot x))) = IS(i \cdot x) = inv \circ (IS(x))$ 。

**4.の証明:**  $\alpha((ir) \cdot x) = [-(x_{j-1} - x_j), -(x_{j-2} - x_{j-1}), \dots, -(x_1 - x_2)] = [x_j - x_{j-1}, x_{j-1} - x_{j-2}, \dots, x_2 - x_1]$  だから, これは  $\alpha(x)$  を逆順に読んだリストであり,  $\alpha((ir) \cdot x)$  と  $\alpha(x)$  は  $\gamma(\beta())$  をとると集合として一致する。したがって 4. の左辺  $= \gamma(\beta(\alpha((ir) \cdot x))) = \gamma(\beta(\alpha(x))) = IS(x) = E \circ (IS(x))$ 。 □

この定理は, 音列の領域での操作  $k$  (可換図式の左側) が音程スケールの領域での操作  $f(k)$  (可換図式の右側) に対応することを示し, 音程スケールの操作は群  $K$  と  $B$  間の準同型写像  $f$  によって単純化される関係にあることを示している。

### 5. まとめ, 今後の課題

本稿では, 音程スケールの概念が,  $n$  平均律  $\mathbb{Z}_n$  の部分群の生成系としての意義をもつことを示し, 生成される部分群が, 音程スケールの各要素の最大公約数  $d$  で特徴付けられることを示した。また, 無調音楽や 12 音音楽への応用上重要な知識として, 音程スケールの生成する部分群がクロマティックになる必要十分条件を示した。これらの結果は, 音程スケールを作曲に応用する際, 音程スケールの選択を考える上で有用な手がかりとなるだろう。さらに, ベルクの 12 音音列から導き出された音列の音程スケールを一般の音列に対して定義し, 音列に対する順行, 反行, 逆行, 反行の逆行という操作のなす群が, 音列の音程スケールの恒等写像と反転の為す群への群準同型によって単純化される関係にあることを示した。

今後の課題としては, 音程スケールを用いた実際の作曲と, 作曲への応用のための技術の開発がある。例えば, ベルクのヴァイオリン協奏曲は「ある天使の思い出」に捧げられており, その背景には, ベルクが可愛がっていたマノン・グロピウスの死がある。したがって, マノンの死へのベルクの感情がこの曲に反映されていると考えられ, それが音程スケールの選択にも関係していると考えられるのは自然であろう。すると, 音程スケールが諸感情を表現する力をどれくらい持つかという問題が現れる。我々は現在, 音程スケールや通常の音階に対して人間の意図した感情を付与させる機械学習モデルの研究を行っている。その研究が成功すれば, 音程スケールは無調音楽における感情表現の手段として応用できるだろう。

また音程スケールを作曲に応用する場合, ある音程ス

ケールを選択し, それに基づく 12 音音列その他の音列が必要になるケースが想定できるが, そのような音列を発見するのは困難な場合がある。そのためそのような条件を満たす音列の存在判定法や, 存在する場合, 実際にコンピュータによって探索するアルゴリズムの研究が有用だと考えられる。実際, 12 音音列において  $\bar{0}$  以外の全ての音程をもつ総音程音列をコンピュータ・プログラムによって生成する研究は過去に行われてきた [3]。この問題を一般の音列および一般の音程スケールに拡張して捉え直すことで, 音程スケールを用いた作曲の支援に貢献できる可能性がある。

### 6. 参考文献

- [1] Allen Forte: *The Structure of Atonal Music*, 1973 (森あかね (訳) 無調音楽の構造, pp.27-44, 音楽之友社, 2012) .
- [2] György Ligeti: *Études pour piano premier livre*, pp.14-19, SCHOTT, 1986.
- [3] 柴田 南雄: 音楽の骸骨の話: 日本民謡と 12 音音楽の理論, pp.93-171, 音楽之友社, 1978.
- [4] 小鍛冶 邦隆: 作曲の技法: バッハからヴェーベルンまで, pp.107-122, 音楽之友社, 2008.
- [5] Douglas Jarman: *The Music of ALBAN BERG*, pp.136-137, University of California Press, 1979.
- [6] 三宅 敏恒: 入門代数学, pp.1-35, 培風館, 1999.
- [7] 田村 孝行: 半群論, pp.1-12, 共立出版, 1972.

### 7. 著者プロフィール

#### 田中 翼

京都大学理学部数学系卒業。東京大学大学院情報理工学系研究科修士課程了。2011 年より東京藝術大学大学院美術研究科先端芸術表現専攻博士課程在籍。研究領域はアルゴリズム作曲および楽曲生成のための音楽理論。日本学術振興会特別研究員, JSSA, IPSJ, IEEE 各会員。

#### 古川 聖

作曲家, メディアアーティスト, 東京藝術大学先端芸術表現科教授, 理化学研究所客員独立主幹研究員。主要作品にマルチメディアオペラ「まだ生まれない神々へ」, インタラクティブ CD-ROM 「スモールフィッシュ」 (Hatje Cantz 出版), 音楽作品集 (CD) 「数による音楽」 (フォンテック社) など。