研究報告

# 算道
# - 演算によって計算が表出する瞬間 -
# SANDO
# - MOMENT OF COMPUTATION EXPRESSED BY OPERATION -

山本一彰
情報科学芸術大学院大学 [IAMAS]
メディア表現研究科 修士課程 2 年
ty.14@iamas.ac.jp

三輪眞弘
情報科学芸術大学院大学 [IAMAS]
メディア表現研究科 教授
mmiwa@iamas.ac.jp

概要

任意のアルゴリズムを実行できることを計算完備という。つまり計算完備であれば四則演算はもちろんのこと、条件分岐や繰り返し処理 および構造体を用いた計算が可能である。したがってノイマン型計算機は計算完備であり、計算器 (人間が計算するために用いる補助道具) であるそろばんは計算完備ではなかった。しかし、計算完備である計算器は構築できると考え、実際に論理珠算という計算手法とそれに対応する計算器"論理算盤"を開発した。そして「計算とは何か」を求めるために算道という概念を論理珠算を内包する形で構成した。

一般に計算の方法は数学によって整然と構築されており、明解であるように思えるが、計算そのものは静的なものではなく動的であるがゆえに捉えづらい。つまり、計算が行われる瞬間とそれを含む連続的な空間にこそ計算があり、それは記述不可能である。しかしながら、論理珠算を実際に行うことによって計算の実体を表出させることができる、ということが本論文の主旨であり、算道の理念の根拠にもなっている。

## 定義

計算
: この論文で扱う計算は記号および自然数を用いて構成される “デジタルな計算” について扱うものであり、自然現象を応用した “アナログな計算” は扱わないため、単に計算と言った場合は前者を指すものとする。

計算完備
: 計算完備とは “デジタルな計算” のすべてを実行できるという意味であり、四則演算以外にも条件分岐や繰り返し処理を行うことができるということである。計算完備のことをチューリング完全とも言う。

計算器, 計算機
: 計算器とは人間が計算を行うときに用いる補助道具のことを言う。それに対し計算機とは動力と入力となるデータさえあれば、自動的に計算を行う機械のことである。

## 1. 研究背景

現代の情報技術はあらゆる事象を記号に置き換え、人間にとっての記号は操作可能なまるで一つの実体のように認識されていながらも、情報処理技術における記号の「計算」そのものは人間にとって不可視なものとなっている。

「計算完備」な計算機 (コンピュータ) が登場し、計算効率の向上と実用的な計算の領域を広げるために応用数学は急速に発展した。それに対し、計算理論に新たな視点を与え、その体系を構築する研究は理論計算機科学と呼ばれ、応用数学と相互に関係しながら発展してきた。

しかしながら、たとえ計算機上でどのような計算が可能になろうとも、得られる計算結果は静的な記号の羅列に過ぎず、計算という概念そのものではない。同様に、いくら言語上で計算という概念を新たな視点から再構成しようとも、それは言い換えに過ぎず、無限後退に陥る。したがって計算の意味は言語では記述できないため、計算の概念を得るためには言語以外への帰着が必要になる。

そこで、人間が計算という概念を理解する上では何かしらの物理的事象への対応関係が必要であると仮定し、

「計算完備」な計算「器」を開発することにした。すなわち、“論理珠算” という計算手法とそれに対応する計算器、“論理算盤” を開発し、さらに「計算とは何か」を求めるために論理珠算を内包する “算道” という概念を定義することにした。

この “算道” という、道具の使用法のみではなく、その道具で何を探求すべきかを定めた理由は、先述の理由から数学の記号体系から逸脱するところに計算の本質を見出す事ができるはずだ、と考えたからだ。

## 2. 論理珠算

論理珠算とは組み合わせ論理 (combinatory logic)[1] を基に構築した計算完備な計算手法である。つまり、記号で記述できる計算のすべてを論理珠算では実行することが出来る。したがって、その理論的な計算能力は現代のノイマン型計算機と等しく、従来の算盤では実現できなかった条件分岐や繰返し処理や構造体を含む計算を行うことが出来る。

具体的には論理珠算は、論理算盤と整珠という概念および 3 つの規則 (青珠の規則, 黄珠の規則, 赤珠の規則) によって成り立っている。

### 2.1. 論理算盤

論理算盤 (図 1) とは論理珠算を行うための計算器である。論理算盤は主に計算を行うための盤面と直方体の珠から構成される。盤面は磁性のある板の上に升目状の模様が上面に施されている。珠は積み重ねが出来るように磁石が埋め込まれており、上面および側面は 4 色 (赤色, 青色, 黄色, 白色) に塗られている。

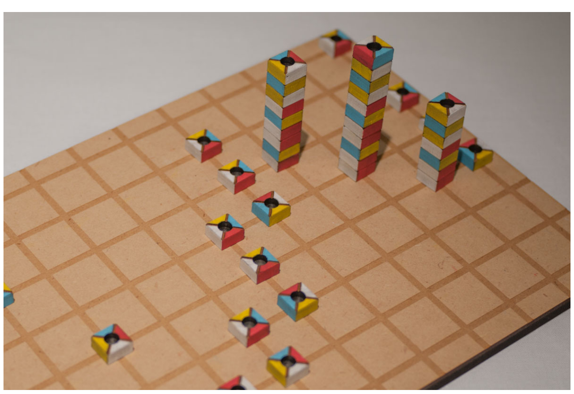

図 **1**. 論理算盤

#### 珠

計算を行う者に向かっている面の色を読み取る。面の色が、白色ならば白珠 (しろだま)、青色のならば青珠 (あおだま)、黄色ならば黄珠 (きだま)、赤色ならば赤珠 (あかだま) と呼ぶ。さらに白珠以外の一つからなる珠を単珠 (たんじゅ) と言い、任意の珠の 2 つ以上の連なりからなるものを複珠 (ふくじゅ) と呼ぶ。

#### 記述方法

色珠を紙面で扱うために基本ラテン文字によって表記する方法を定める。白珠、 青珠、 黄珠、 赤珠をそれぞれ`(バッククォート)、`s`、 `k`、 `i` と表記する。

#### 整珠

整珠 (せいじゅ) とは後述の性質を満たす単珠または複珠である。整珠は組み合わせによって構成されるがゆえに無限に存在する。そのため、その紙面で整珠を識別するために表記方法として接頭語@とアラビア数字を用いる。例えば、`@0`, `@1`, `@2`, ... のように表記する。

整珠は次の性質を満たす。

- 単珠は整珠である。
- `@0`, `@1` をそれぞれ整珠としたとき、`` `@0@1 `` もまた整珠である。

#### 整珠の展開と結合

`@0` を 3 つ以上の珠からなる整珠とする。このとき、整珠`` `@1@2 ``が`@0` と等しくなる整珠`@1`, `@2` を用いて展開してもよい。このとき展開前 (図 2) と展開後 (図 3) の様になる。また展開と逆の操作をしてもよく、そのことを結合という。


図 **2**. 整珠展開前

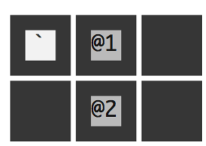


図 **3**. 整珠展開後

## 2.2. 計算方法

青珠の規則

‘‘‘s という珠の並びが盤面上に現れた場合に適用できる規則である。@0, @1, @2 をそれぞれ整珠とする。このとき、規則を適用すべき整珠を適用前 (図 4) の様に並べる。そしてそれを適用後 (図 5) のように並べ替える。注意すべき点は規則の適用後に@2 が 2 行目と 4 行目と二回現れているが、これは@2 にあたる整珠を複製して同じものを 2 つ用意するという意味である。

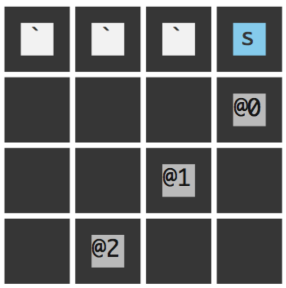


図 **4**. 青珠の規則適用前

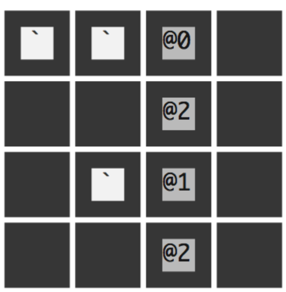


図 **5**. 青珠の規則適用後

黄珠の規則

‘‘k という珠の並びが盤面上に現れた場合に適用できる規則である。@0, @1 をそれぞれ整珠とする。このとき、規則を適用すべき整珠を適用前 (図 6) の様に並べる。そして、‘, ‘, k, @1 を取り除き、@0 のみを適用後 (図 7) のように置く。

赤珠の規則

‘i という珠の並びが盤面上に現れた場合に適用できる規則である。@0 を整珠とする。このとき、規則を適用すべき整珠を適用前 (図 8) の様に並べる。そして、‘, i を取り除き、@0 のみを適用後 (図 9) のように置く。

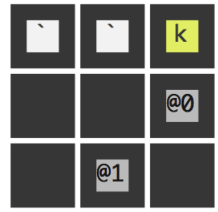


図 **6**. 黄珠の規則適用前

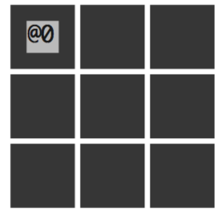


図 **7**. 黄珠の規則適用後

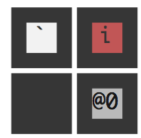


図 **8**. 赤珠の規則適用前

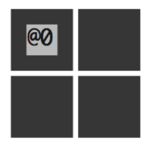


図 **9**. 赤珠の規則適用後

計算

与えられた 4 色の珠の連なりを論理算盤上で 3 つの規則 (青珠の規則, 黄珠の規則, 赤珠の規則) によって動かすことを計算と言う。それは次に示される手続きによって実現される。

1. 入力となる珠を算盤の一番左上に置く。
2. 盤上にある珠が整珠であることを確認する。整珠でない場合は計算は失敗しており、続行は不可能である。
3. ‘i から始まる整珠を探す。該当する整珠がある場合はその整珠に白珠の規則を適用し、1 へ戻る。該当する整珠がない場合は 4 へ。
4. ‘‘k から始まる整珠を探す。該当する整珠がある場合はその整珠に黄珠の規則を適用し、1 へ戻る。該当する整珠がない場合は 5 へ。

5. ‘‘‘s から始まる整珠を探す。該当する整珠がある場合はその整珠に青珠の規則を適用し、1 へ戻る。該当する整珠がない場合は終了し、その時点での珠が出力となる。

備考

計算に必要な珠の個数や盤面の行数や列数は計算をするまで予測は不可能である。従って、珠や盤面が不足する場合は随時追加することが求められる。

さらに、珠は物理的な制約から平積みする個数には限界があり、かつすべての珠を展開して計算することも盤面の有効活用の点から推奨されない。そのため、計算する上で珠を必要に応じて展開や結合をすることが求められる。

また、計算は必ずしも終わるとは限らない。例えば、“ものまね鳥の番い” と言われる整珠 (図 10) は永遠に計算が終わらない。これは論理珠算が正しく機能していないわけではなく、記号上で行われる計算の概念的な上限に達していることによる。


図 **10**. “ものまね鳥の番い” の整珠

### 2.3. 計算例

計算例として「真かつ偽」の場合を紹介する。 先の命題を表す整珠は図 11 のようになる。

0. 初期状態
　「真かつ偽」を表す整珠を盤面に展開した状態が図 12 である。
1. 青珠の規則を適用
　図 12 の盤面に ‘‘‘s が存在するので青珠の規則を適用する。適用後の盤面は図 13 の様になる。
2. 青珠の規則を適用
　図 13 の盤面の 1 行目に ‘‘‘s が存在するので青珠の規則を適用する。適用後の盤面は図 14 の様になる。
3. 黄珠の規則を適用
　図 14 の盤面の 1 行目に ‘‘k が存在するので黄珠の規則を適用する。適用後の盤面は図 15 の様になる。
4. 計算終了
　図 15 の盤面に ‘i, ‘‘k, ‘‘‘s が存在しないので計算を終了し、図 15 の盤面に残った珠が計算結果となる。つまり ‘sk が出力である。


図 **11**. 「真かつ偽」を表す整珠

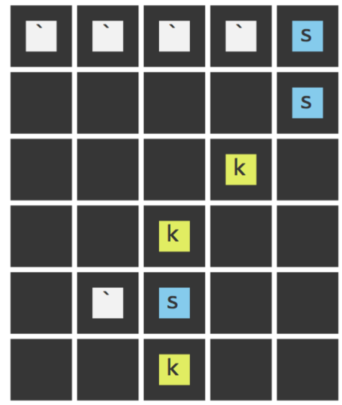

図 **12**. 初期状態

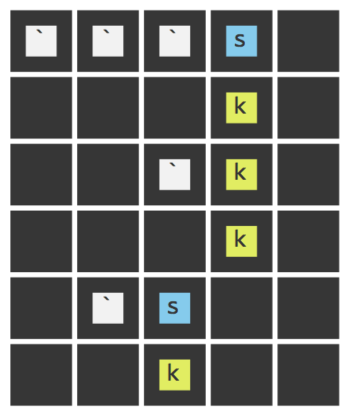

図 **13**. 青珠の規則を適用

### 2.4. 理論的背景

論理珠算は組み合わせ論理 [1] という計算モデルに基づいており、特にその中でも SKI コンビネータ 式 (1), 式 (2), 式 (3) を用いている。

$$S\ x\ y\ z \to x\ z\ (y\ z) \tag{1}$$
$$K\ x\ y \to x \tag{2}$$
$$I\ x \to x \tag{3}$$

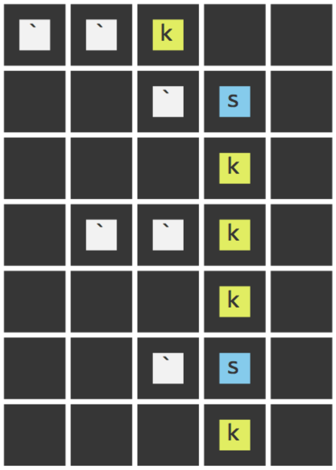


図 **14**. 青珠の規則を適用


図 **15**. 黄珠の規則を適用

組み合わせ論理を用いる理由は記号の少なさとそれに伴う規則の少なさが挙げられる。例えば、よく知られているラムダ計算 [4] という計算モデルでは、変数を扱うために可算無限個の種類の記号を準備する必要がある。

しかし、珠のような物体には 1 つあたりに高々有限個の情報量しか持てず、変数を表す珠は構成できない。したがってラムダ計算や変数を含む一般のプログラミング言語は不適であると考えられる。

もうひとつよく知られた計算モデルにチューリングマシン [2] があるが、チューリングマシンは計算機を構成するために考案された仮想機械である。そのため、モデルの構成が細分化されており、テープやヘッドなど人間が計算を行うためには不必要な概念が含まれるため、不適であると考えた。経緯からしてもチューリングマシンは、計算という行為から人間を排除するためにチューリングにより考案されたため [6]、計算器を構築するためにチューリングマシンを用いるのは適切ではない。

## **3.** 算道

算道とは「論理珠算を用いて計算の宇宙を探求する道」と定めた。

### 算道の構成要素

算道はその理念に基づいた探求方法として、次のような概念を定義している。

形
: 論理珠算における形は 3 つの規則 (青珠の規則, 黄珠の規則, 白珠の規則) の応用の事を言う。3 つの規則 (青珠の規則, 黄珠の規則, 白珠の規則) は基本形とも言われる。基本形を組み合わせたものを応用形という。 応用形は無限に存在する。

稽古
: 算道における稽古とは、計算の宇宙を体得するために行う修練のことである。確立された方法に列挙と乱取りの 2 つがある。

演算
: 算道において演算とは習得した計算を披露する演技である。一般的に「計算」と「演算」は同じような意味で用いられるが、算道においては両者を別の意味として使う。

## **4.** 考察

### **4.1.** 計算における事象的中間層の必要性

池上高志は中間層を次の様に定義している。

> 生命は、物理化学法則の上に作られながらも、その基本法則からあたかも独立であるかに見える層 (レベル) を作っている。下のレベル (原子分子などの法則のレベル) に言及せずに記述できるレベル、それを中間層とよぶことにする。[5]

つまり中間層という概念は還元主義に陥ることなく、構成的に物事を解釈するための方法論といえる。池上高志は書籍の中で、熱力学においてはエントロピーという概念があり、それが中間層として働いていることを紹介している。

計算の世界に例えるならば、アルゴリズムを記述するために、アセンブラ言語から高級言語という層が生まれたことに対応すると考えられる。アセンブラ言語が含む特定の CPU に内蔵される固有の機能は、必ずしもアルゴリズムを記述するときに必要にならないからである。高級言語という中間層の登場によって、私たちは計算をより効率的に記述することができるようになった。

しかし、1 節で述べたように、高級言語が行なっていることは単なる計算の概念の置き換えに過ぎない。人間が計算という概念を理解する上では何かしらの物理的事

象への対応関係が必要であると仮定したとき、計算の概念から事象を引き起こす中間層の設定が必要になる。

### 4.2. 論理珠算という中間層の有効性

計算の概念から事象を引き起こす中間層として論理珠算を採用した。特に珠はその中でも重要な役割を持ち、盤面は珠の情報を捉えやすくするための補助的なものである。珠が重要である理由は、記号上の「静的同一性」と時空間上の「動的同一性」を持つ存在であるからだ。珠の記号上の静的同一性とは、例えば 2 個の白珠があるとき、物質的組成は一つ目の「白珠」と二つ目の「白珠」は違うものの、人間は両者を区別なく「白珠」という記号として同一に認識できることである。同様に珠の時空間上の動的同一性とは 1 個の白珠を左から右に動かしたとき、その動作の前後の白珠を同じ物体として認識できることである。

計算の概念は記号とその操作によって構築されるがゆえに、静的同一性と動的同一性を持たなければならないと考えるため、珠はその条件を満たしている。

一方で手書き計算では左辺から右辺に書き換える際に、どういう操作が行われたかは、計算者に隠蔽され見ることが出来ない。つまり、動的同一性が確保できない。例えば、式 (4) の SKI 計算ではどの左辺のどの記号が、どの記号へ遷移したかがわかりづらい。計算者にとっても、計算の操作が自身の思考に保持されるのみで、自身の思考の中で起きた現象の何が計算だったのかを捉えるのは難しい。

$$S\,K\,K\,S \rightarrow K\,S\,(K\,S) \tag{4}$$

### 4.3. 算道の演算で見るべきもの

ドイツの哲学者であり、数学者であるライプニッツは思考実験として次の様に述べている。

> ものを考えたり、感じたり、知覚したりできる仕掛けの機械があるとする。その機械全体をおなじ割合で拡大し、風車小屋のなかにでもはいるように、そのなかにはいってみたとする。だがその場合、機械の内部を探って、目に映るものといえば、部分部分がたがいに動かしあっている姿だけで、表象について説明するにたりるものは、けっして発見できはしない。[3]

上記の「機械」を「(算道の) 演算をする人間」として置き換えて考えてみる。そうしたとき、その事象を還元主義的に考えれば、論理珠算の記述でしか説明できず、「計算をする人間」について説明するにたりるものは、けっして発見できない、というのがライプニッツの言葉から導き出せる。

従って、算道の演算で見て考えるべきは、人間が何をもって計算を体現しているかであろう。換言すれば、演算をなしている中間層を発見するということにちがいない。

## 5. 参考文献


[1] Curry, Haskell B., et al. “Combinatory logic", Amsterdam: North-Holland, Vol.2, 1972.

[2] Richard P. Feynman, Anthony Hey, *Feynman Lectures On Computation*, 1996. (A. ヘイ, R. アレン, 原 康夫 (訳), 中山 健 (訳), 松田 和典 (訳), ファインマン計算機科学, 岩波書店, 1999.)

[3] Gottfried Wilhelm Leibniz, “LA MONADOLOGIE” 1714. (ライプニッツ, 清水富雄 (訳), 飯塚勝久 (訳), 竹田篤司 (訳), モナドロジー・形而上学叙説 (中公クラシックス), 中央公論新社, 2005.)

[4] A. M. Turing “Computability and λ-definability” The Journal of Symbolic Logic, Vol.2, pp 153-163, 1937.

[5] 池上高志, 動きが生命をつくる-生命と意識への構成論的アプローチ-, 2007.

[6] 森田真生, 数学する身体, 2015.


## 6. 著者プロフィール

### 山本一彰 (Takaaki Yamamoto)

1991 年、東京都台東区生まれ。東京工業大学 理学部情報科学科を卒業後、情報科学芸術大学院大学 (IAMAS) メディア表現研究科に在籍。計算機科学と応用数学を専門とし、計算を主題とした作品を制作している。

http://www.monophile.net/

### 三輪眞弘 (Masahiro Miwa)

1958 年東京生まれ。ベルリン芸術大学、ロベルト・シューマン音楽大学で作曲を学ぶ。アルゴリズミック・コンポジションと呼ばれる手法で数多くの作品を発表。旧「方法主義」同人。「フォルマント兄弟」の兄。情報科学芸術大学院大学 (IAMAS) 教授。