研究報告

自然法則の定数による新音律を用いた作曲
COMPOSITION USING A NEW TEMPERAMENT CALCULATED BY GOLDEN RATIO

横山 真男
Masao YOKOYAMA
明星大学 情報学部
School of Information Science, Meisei University

概要

本研究報告では、現代音楽や多様な音楽制作における新しい音素材のひとつとして、既存の音律とは異なる新音律を提案しその作曲と演奏の実際について議論する。すなわち、既存のピタゴラスが用いた 3 の倍数による音律生成ではなく、整数の代わりに黄金比といった自然界にある数学定数を元に算出した音律を示す。黄金比とネイピア数で作成した不均一な音列となる新音律は平均律に比べ「未知な」「不思議な」といった印象が与えられ、エレクトロニクス以外の演奏の実現方法として弦楽器による作曲についてふれる。

1. はじめに

今日、我々が慣れ親しんでいるクラシックやポップス、ロックなどの西洋音楽のほとんどが 12 の半音で 1 オクターブを構成する音階を用いて作曲されている。この 12 音からなる音律の原点は、約 2500 年も前に数学者ピタゴラスによって発見されたいわゆるピタゴラス音律とされている。ピタゴラス（ギリシャ, BC582-496）は、一弦琴を用いて弦長の 1/3 のところに駒をたてると五度高い音（ドが基準であればソ）が得られ、この 2 つの音が心地よく響くことを見つけた。つまり、最初の音（根音）の周波数を 3 倍して 2 で割り、基準の音に協和する第 2 の音を作った。2 で割ったのは根音からオクターブの間に第 2 の音を配置する為である。この手順で順に五度音程を重ねていくと、今日広く用いられる 12 個の音高が得られる。中国で開発された三分損益法は竹を切って作った笛を鳴らしたときのピッチを計測していくのだが、原理はピタゴラスと同様である。

1900 年代前半以降のクラシック音楽においては、印象主義作曲家による教会旋法への回帰と全音音階や、新ウィーン楽派に始まる十二音技法といったような調性音楽からの解放の流れに伴い、前衛的な作曲家によって微分音やクラスターを用いた音楽が発展した [1]。1920 年代にはバルトークやアイヴズにより 1/4 音や 1/6 音といった微分音が用いられるようになり [2]、さらにはヘンリー・カウエルの提唱したトーンクラスタ奏法 [3] に始まった連続ピッチによる音の塊による音楽表現も今となっては 100 年もの前の技法となってしまっている。

また、非西洋の異国文化の民族的音律 [4-7] を取り入れた曲や、実験的音楽も盛んになり、常に作曲家は新しい音楽の体系（理論、システム）を開発するのに邁進してきた [8]。いわゆる現代音楽とよばれる 20 世紀以降の前衛的なクラシック音楽においては、もはや半音 12 種類だけでは作曲家の芸術表現を満足させることはできなくなり、様々な新しい音律 (音程) が作曲家により提唱されてきた。曲の構成や音列システム [9,10]、音楽の数理的解析 [11,12]、またコンピュータによる音楽理解 [13] として研究されてきた。しかし、音律そのもの生成方法においてこういった数学定数が使われた例はないとみられる。

身近な例でいえば、あのお化けがでてくるときの“ヒュードロドロ”といった効果音の類は、既存の音階を逸脱しスライドされた連続ピッチ変化による音の表現（グリッサンド）であり、現代ではクラシック音楽のみならず映画やアニメ、ゲーム音楽など非音階的表現が使われている例は枚挙にいとまがない。

従って、今日の音楽はもはや長短音階や調性といった機能和声をベースにした古典的システムから解放され、新しい概念で作曲されることが多くなり、ゆえに現代音楽の作曲家は常に何らかの新しいオリジナルな音（ハーモニー、音階）の探求をしていると言える。

そこで本研究は、2500 年も前にピタゴラスにより作られた既存の半音 12 音による音律とは別の音律の導出方法の提案を行うものであり、上述のような現代音楽における新しい音楽探求だけでなく、映画や舞台、

ゲーム等における新しいサウンドとして BGM への応用としての位置づけである。

2. 黄金比を用いた新音律の導出

本研究で用いた黄金比による新音律作成の手法について概要を記す。自然界と密接な関係があり人間が無意識に美しいと感じる比であると言われている黄金比（約 1.618）を取り上げた。黄金比は、フィボナッチ数列と共に音楽と数学の融合した手法として度々取り上げられ、黄金比を曲の構成や音高の配置に用いた作曲家としてバルトークが有名である [14]。

音律の導出手順についてはピタゴラス音律と同様に数学定数を乗じて順次生成する。異なる点は、その掛け合わせる数が数学定数になっていることであり、また、掛けていくことで次々生成されたピッチをオクターブ以内に収めるために、2 で割るのではなく他の幾つかの素数 m で除算を行うところである。

以下に概要を説明するが、詳細は過去の発表原稿を参照されたい [15,16]。最初の基準となる音 x_0 の周波数 f_0（例えば $C4 = 261.6Hz$）に、黄金比 $G(= 1.618)$ を掛けてできた周波数 $f_1 = Gf_0$ を x_1 とする。以降、次の手順を繰り返していく。

1. $f_{i+1} = Gf_i$ 次々と黄金比 G を掛ける。
2. ここで掛けた結果が基準音 f_0 の 2 倍以上（オクターブ以上）の値になった場合にのみ、素数 $m(= 2, 3, 5...)$ で割る（オクターブ以内に収めるため）。
3. 1. と 2. を繰り返し、適当な回数に達したときに生成した値の列をみてピッチの繰り返しパターンを抽出。

素数 $m = 2, 3, 5$ のそれぞれの場合の計算結果を図 1 に示す。横軸は計算回数 i で、縦軸が計算された周波数である。基準音のピッチ f_0 のオクターブを超えた時に m で割っているため、ピッチは計算回数を重ねるごとに上下を繰り返しながらある規則的な並び方をしていることが分かる。

例えば、図 1(A) の $m = 2$ の赤棒 (点線枠内) で示した値に着目すると、3 つおきに値を選ぶと (i mod ($modulo$) $3 = 0$ となる f_i) 徐々に周波数が上昇するピッチ列のパターンが形成されているのがわかる。また、このピッチ列のパターンは、計算回数を増やしても非常に近接した値で繰り返されるので、その近接値を音律の構成要素として同じと見なすと、全部で 12 個からなるピッチ列が得られる。他の i mod $3 = 1$, i mod $3 = 2$ でピッチ列を抜き出してみると、全く同じ値ではないが近接した値で同様に 12 個のピッチ列が得られる。表 1 では、i mod $3 = 0$ の列を昇順に並べ、ピッチ列を基準音から順に周波数の低い順にならべ番号を振り（音番号)、ピタゴラス音律や平均律と比較したものである。各音のピッチは平均律やピタゴラス音律のそれとは少しずつ異なるが、数ヘルツ以内とそう大きなピッチ差はない。

なお、同様に、図 1(B) の $m = 3$ では 2 つおきの下降パターン、図 1(C) の $m = 5$ のパターンでは 3 つおきの下降パターンが得られる。

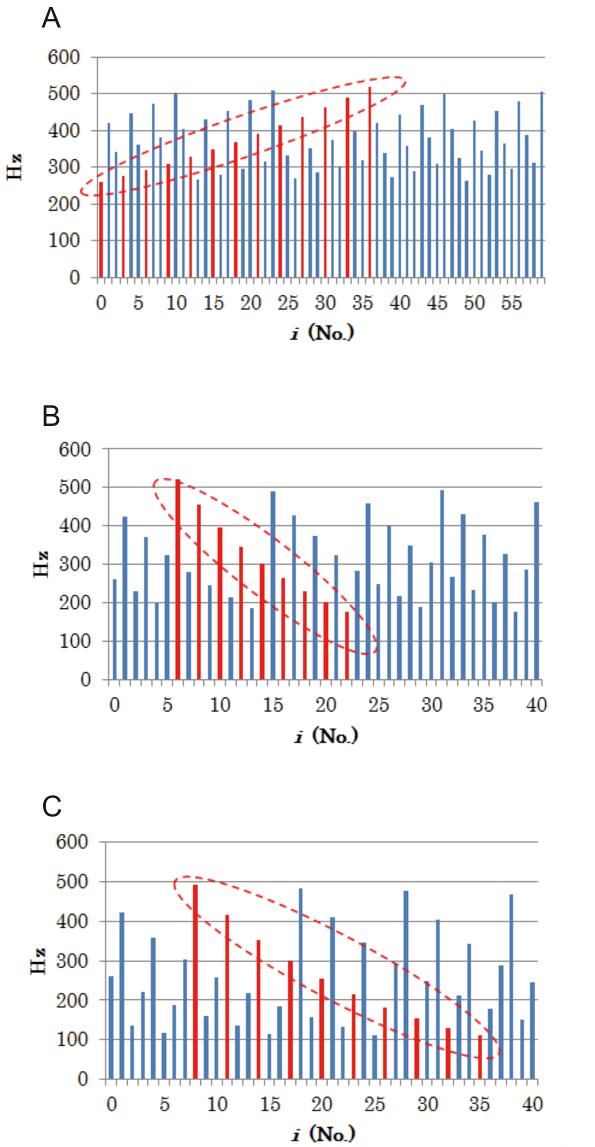

図 1. 黄金比を掛け合わせたことによるピッチ列（横軸:計算回数）

表 2 に得られたピッチ列の値を昇順に並び替えて整列させた結果を示す。それぞれのピッチ列に基準音から周波数の低い順に音番号を振っている。なお、ここで、近いピッチ同士の音では音程の識別がしにくいので省き、またオクターブ関係に近いのも省いた。例え

表 1. 黄金比を掛け合わせた音律（$m = 2$, 図 1 グラフの赤）とピタゴラス音律および平均律との周波数の比較

音番号 No. (図 1A)	黄金比音律 (m=2)	音名	ピタゴラス音律	平均律
0	261.6	ド (C4)	261.6	261.6
3	277.0	ド#	279.4	277.2
6	293.4	レ	294.3	293.7
9	310.6	レ#	314.3	311.1
12	329.0	ミ	331.1	329.6
15	347.2	ﾌｧ	353.6	349.2
18	367.6	ファ#	372.5	370.0
21	389.3	ソ	392.4	392.0
24	412.2	ソ#	419.0	415.3
27	436.5	ラ	441.5	440.0
30	462.3	ラ#	471.4	466.2
33	489.5	シ	496.6	493.9

単位:Hz

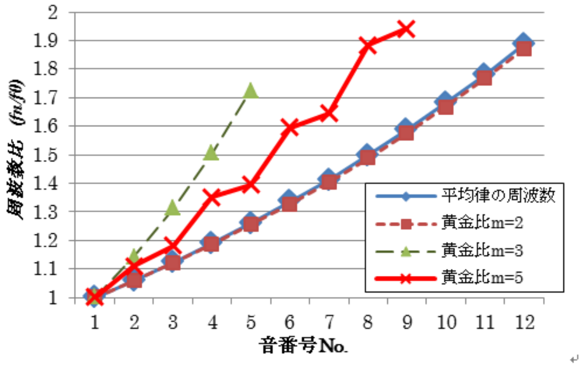

図 2. 黄金比と平均律のピッチの比較。音番号 No.1 は基準音の $A = 440Hz$。

ば、黄金比の $m = 3$ のパターンでは No.6〜9 のピッチは、それぞれ No.1〜4 のほぼ倍でオクターブ関係に近く、$m = 5$ の No.3 は上下の No.2 および No.4 に近すぎるので省いた。結果、$m = 3, m = 5$ では $m = 2$ の時とは異なり生成された音律に含まれる音数は 12 音ではなく $m = 3$ では 5 音、$m = 5$ では 9 音となった。生成した音律を基準音（$C4 = 261.6Hz$）に対する比にしたものを図 2 に示す。

表 2. 黄金比およびネイピア数による音律の周波数の比較

音番号 No.	黄金比 m=2	m=3	m=5
1	261.6	174.8	220.2
2	277.0	200.2	244.9
3	293.4	229.5	~~252.2~~
4	310.6	263.0	259.8
5	329.0	301.4	297.8
6	347.2	~~345.4~~	306.7
7	367.6	~~395.8~~	351.5
8	389.3	~~453.5~~	362.1
9	412.2	~~519.7~~	414.9
10	436.5	-	427.4
11	462.3	-	-
12	489.5	-	-

下の No.4 に近いため未使用。

上の No.1〜4 と倍（オクターブ）に近いため未使用。

3. 新音律を用いて作曲と演奏をどう実現するか

既発表の研究報告にて、数学定数を用いた新音律の検証実験を行い、新音律がこれまでの平均律による音階とは違う印象を受け、音律が「不思議な」「未知な」といった特徴を持つことを示した。図 3, 4 はそのアンケート結果で、平均律と黄金比音律を聴き比べてその印象語を SD 法で評価したものである（詳細は文献を参照 [15,16]）。このような既存とは異なる感覚の音律を用いた音楽の用途としては、例えば、映画音楽やゲーム音楽の不気味でスリリングなシーンや不安な心理描写などが考えられる。

しかし、ここでこの音律で音楽をどう演奏するかという問題が残っている。電子楽器による再現であれば自由に黄金比のピッチを設定できるが、既存の楽器では容易ではない。本研究では、非電子楽器によるクラシック音楽のスタイルでの新音律の利用方法について言及する（以降、「楽器」は非電子楽器を指す）。

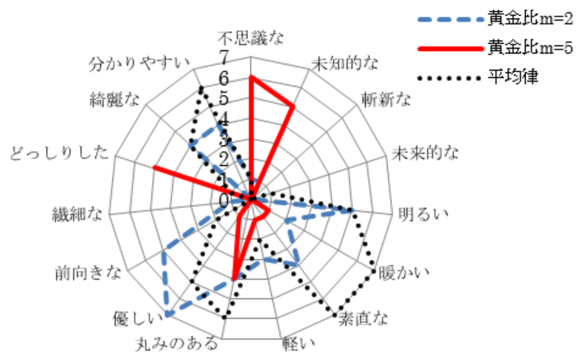

図 3. 黄金比音律と平均律の評価の比較（ポジティブワード）[15]

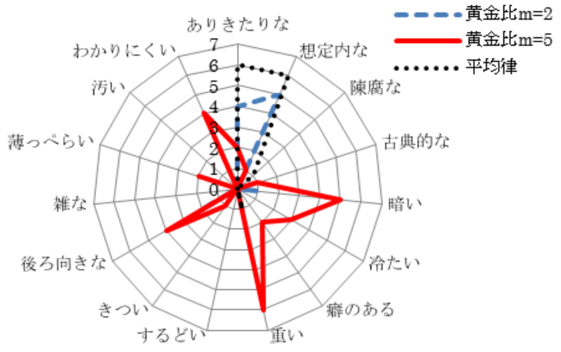

図 **4**. 黄金比音律と平均律の評価の比較（ネガティブワード）[15]

4. 考察

4.1. 平均律でないことによる演奏上の問題点

一番の問題は、新しい音律で調律した楽器をどう用意するかことであるが、管楽器は穴の開ける位置や管の長さや太さの変更のため容易ではないし、それで音楽的な音色が担保できるかも難しい。ある程度のピッチを調節できる楽器として弦楽器があるが、ピアノやハープは弦の数が多いので調律に時間がかかる。より弦の数が少なく手軽に調律できるバイオリンやギターなどの弦の少ない弦楽器を対象にした。

しかし、バイオリンには演奏上の問題がある。バイオリン奏者は、目印のない指板上を自分の耳と経験で指を押さえて音をとるため、既存の平均律や純正律とは違った音高を押さえることはかなり難しい。つまり、ギターとは異なりフレットのようなものがなく自由にピッチがとれる分、既存のピッチの感覚で鍛え抜かれた耳と勘がかえって邪魔をしてしまい、それに当てはまらない本研究のような新しいピッチを押さえるのは奏者としてほぼ無理に近い。こういったバイオリン属においては、弦楽器特有のハーモニクス（フラジオレット）奏法と呼ばれる弦の整数倍音で音が出せる特色を生かした作曲が考えられる。

一方、ギターはフレットがあるのでバイオリンのような制約が少なくさらに多くの音高を選択できる。

4.2. 黄金比を用いた各弦のチューニングについて

新音律のピッチを使って各弦をどうチューニングするかについては、作曲者がいくつかの選択肢から選ぶことになる。例えば、オーケストラでチューニングに用いられる A 音（440Hz）を基準音として（チェロはそのオクターブ下の 220Hz)、ここで示した黄金比による音律のピッチで各弦を調弦する方法が考えられる。弦楽器による楽曲では、しばし通常の五度調弦とは異なる調弦をして演奏するスコラダトゥーラという調弦がある。上で述べたように、バイオリン属は調弦変更が易しいのと、ハーモニクス奏法による倍音に加え、重音奏法による音程・和音のバリエーションの多さ、四重奏にすることによる音程の重ね合わせなどが利点である。

表 3 に、バイオリン 2 挺ヴィオラ 1 挺チェロ 1 挺による弦楽四重奏曲の例を示す。黄金比を用いた音律をバイオリン (ファーストおよびセカンド)、ヴィオラ、チェロの各開放弦に近い値を当てはめたものである。今回使用した音律は、既発表のアンケート結果 [15] より、黄金比を掛けていきオクターブを超えた時に 5 で割って生成される音律 ($m = 5$) が独特のハーモニーがでる期待があったのでこれを例に取り上げた。

表 **3**. 黄金比による弦楽四重奏の各パートの調弦ピッチ

Part	String Ⅰ	II	III	IV
1st Violin	703.1Hz (near F)	440.3Hz (A)	297.8Hz (near D)	213.7Hz (between G#-A)
2nd Violin	613.5Hz (near D#)	440.3Hz (A)	259.9 Hz (near C)	181 .1Hz (near F#)
Viola	440.3Hz (A)	297.8 Hz (near D)	207.5 Hz (near G#)	122.5 Hz (near H)
Cello	220.2Hz (A)	153.4 Hz (near D#)	90.5 Hz (near F#)	63.1 Hz (between H-C)

同様にしてギターについても例を示す。図 5 は $m = 5$ の黄金比音律によるギターの場合であるが、下記のように各弦を調弦する方法が考えられる。

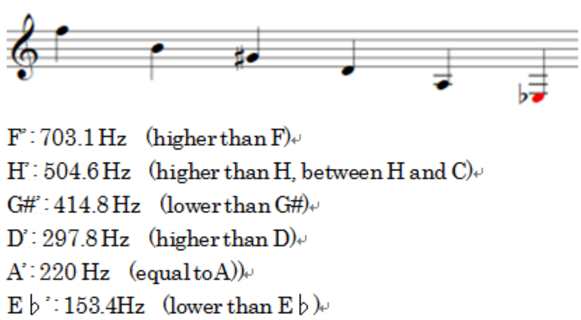

図 **5**. 黄金比 ($m = 5$) ギターの調弦例

4.3. 作曲の実際にあたって

上述したように、演奏者は指定の黄金比のピッチで音を押さえて取るのは困難であるが、表 3 の開放弦に加えハーモニクスを使うと出せる音が増える。また、演奏者は指定の黄金比のピッチで音を押さえて取るのは困難なため、開放弦やハーモニクスで曲を構成した方が本論文で提案する特殊な音律によるチューニング

が活かされると思われる。開放弦とハーモニクスのみでも、アルペジオや重音にすることで黄金比の調弦により通常の協和する五度調弦と異なるため、非協和音程が曲の印象を独特のものにする。ただ、実際に弾いてみたときに重音のハーモニクスは五度調弦より協和しにくく響きにくい。特にピッチカートなどは音が出にくいため音の選択に注意がいる。

図 6 から図 8 に筆者が作曲した弦楽四重奏の形式で書いた曲の一部を示す。記譜上は通常の音高で書いてあり、記譜通りに演奏すると実音は黄金比でチューニングしたピッチで奏されることになる（スコラダトゥーラの奏法記譜と同様）。さらに、室内アンサンブルの特色を活かし、1 パートのみではなく、4 パートの音を重ねることで黄金比の音程を重ねたハーモニーを効果的に曲に使うことができる。

ハーモニクスを重音にすることで特異な和音も表現可能である（譜例：図 6）。さらに、室内アンサンブルの特色を活かし、1 パートのみではなく、4 パートの音を重ねることで黄金比の音程を複雑に表現して効果的に曲に使うこともできるであろう。譜例のように、同時に各パートが記譜上は同じ音高を奏しているように見えるが、調弦のピッチが異なるため実音は別の音高でハーモニーが幾重にも重なる。また、ハーモニクスを交互に各パートの音を変えることで音程が様々に移り変わる面白さも表現できる（図 7）。その場合には各楽器各弦で発生可能なハーモニクス列を整理・確認しておく必要がある。

ギターも同様に重音が効果がある。また、フレットがあるためにハーモニクス以外の音も使えるのでバイオリンよりも自由度がある（図 8）。

図 6. 重音とハーモニーを使った譜例

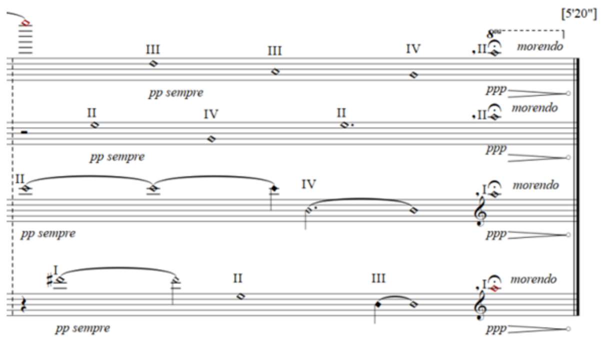

図 7. 交互にハーモニーを変える譜例

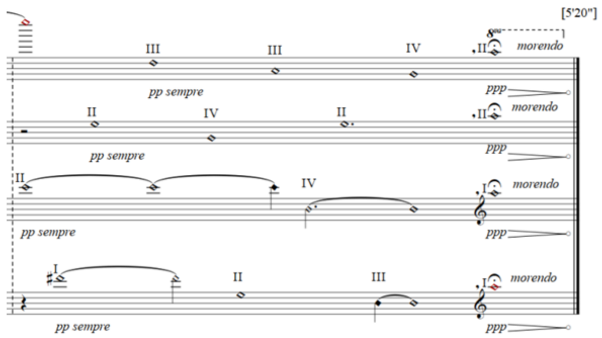

図 8. ギターによる譜例.　ハーモニクス以外の音も使える.

5. おわりに

本研究では、ピタゴラスにより始まった既存の 12 音からなる音律に代わり、数学定数の例として黄金比を用いた音律を示した。また、これまでにない独自性を感じると評価された黄金比による音律の場合について、実際に現代音楽を書き演奏する方法についても弦楽四重奏およびギターを例に言及した。なお、ここで述べた作曲や実際の音源については、下記 URL にて公開している。

（`http://www.cello-maker.com/research/`）

6. 参考文献

[1] 岡田尭生: 西洋音楽史, NHK 出版, pp169-165 (2013).

[2] D. コープ: 現代音楽キーワード辞典, 春秋社, pp.125-129 (2011).

[3] P. グリフィス: 現代音楽小史, 音楽之友社, pp.117-121 (1984).

[4] 藤井知明:「音楽」以前, 日本放送協会出版, pp50-57 (1978).

[5] 塩川博義, 梅田英春, 皆川厚一: インドネシア・バリ島の教育機関に関係のあるガムラン・ゴング・クビャールの音高, 日本大学生産工学部研究報 A 理工系 47.1, pp.17-23 (2014).

[6] 三木稔: 日本楽器法, 音楽之友社, pp.9-11 (1996).

[7] 出口幸子, 白井克彦: 楽譜情報に基づいた箏曲の音律と音階の分析, 情報処理学会論文誌 42-3, pp.642-649 (2001).

[8] 藤枝守: なぜピアノの音は, 響かないのか 近代音楽における機能主義: 情報処理学会研究報告, IM-97, No.62, pp.7-12 (1997).

[9] Beer Michael: Mathematics and music: Relating science to arts, Mathematical Spectrum 41.1 pp.36-42 (2008).

[10] Diaz-Jerez G.: Algorithmic Music: using mathematical models in music composition. Diss. The Manhattan School of Music (2000).

[11] Capanna Alessandra: Music and Architecture: A Cross between Inspiration and Method, Nexus Network Journal, 11.2 pp.257-271 (2009).

[12] Coulter, Lisa O.: Mathematics, music and the arts: Making finite math relevant to the arts major, Proceedings of the 35th Annual Meeting of Florida Section Mathematical Association of America. (2002).

[13] Manaris Bill, Charles McCormick, and Tarsem Purewal : Can Beautiful Music be Recognized by Computers. Technical Report CoC/CS (2002).

[14] E. レンドヴァイ: バルトークの作曲技法, 全音楽譜出版社, pp.25-41 (1978)

[15] 横山真男, 現代音楽のための黄金比を用いた新音律の提案と評価, 日本音響学会 2015 年秋季研究発表会 (2015).

[16] 長田将弥, 横山真男: 自然法則を用いて算出した音律の創造の試み, 情報処理学会研究報告, MUS-102 No.23, pp.1-7 (2014).

7. 著者プロフィール

横山 真男 (Masao YOKOYAMA)

1996 年早稲田大学大学院修了後，電機メーカー、楽器店においてバイオリン製作・販売，チェロ講師，伊クレモナ留学などを経て，2009 年東洋大学にて社会人博士として博士 (工学) 取得．2012 年より明星大学情報学部准教授．編曲・作曲家．音楽演奏，楽器音響，コンピュータによる音楽制作を中心に芸術の科学的解明に取り組む．