

## 研究報告

# 音差反転

## 一和音の鏡像操作による三和音体系の生成と作曲への応用一

### Pitch-Difference Inversion: A Mirror Operation on Chords Generating a System of Triads

精木 禅  
Zen ABEKI  
作曲家

Independent Composer

横山 真男  
Masao YOKOYAMA  
明星大学 情報学部

School of Information Science, Meisei University

#### 概要

音楽理論において、なぜ長三和音と短三和音がトニックとして扱われるのか、という問いは、ラモーによる『和声生成論』以来およそ 300 年にわたって繰り返し論じられてきた。本稿は、三和音  $Y$  の構成音（1 度 3 度 5 度の音）をそれぞれ独立した対称点とし、和音  $X$  の構成音それぞれを  $Y$  の各対称点（和音構成音）で反転させる操作を、音差<sup>1</sup>反転と定義し、この操作のもとで長三和音と短三和音の特権性について論じる。

本論文では、ドミナントモーションと対称に動く和音進行は何かという問いから出発し、音差反転の定義を示し、さらに、操作が破綻しない条件を課すと、鏡<sup>2</sup>になりうる和音は三度堆積の四種類に絞られることを示す。そして、鏡自身がその鏡の生む体系に現れるという制約を課すと、条件を満たす組は長三和音と短三和音の一組に限られた。

さらに、応用として、調内の和音を反転した結果の一覧と、実際の楽曲の和音進行に音差反転を適用した例を示す。

#### 1. はじめに

##### 1.1. 本研究の学術的な問い

なぜ長三和音と短三和音がトニックとして扱われるのか。これは音楽理論の古典的な問いである。

ラモーは『和声生成論』(Rameau 1737)において、共鳴している物体に含まれる倍音から長三和音を導いた。周波数比 4 : 5 : 6 から長三和音が導出できるが、短三和音については同じ導き方ができない。ラモーは低い

側へ共鳴する弦を根拠とする説明を試みたが、下方の弦が基音で共鳴するわけではないことがのちに指摘され、この説明は撤回された。長三和音と短三和音を対等に扱う音響的な根拠は、最後まで得られなかったのである。

そこでリーマンやエッティンゲンの和声二元論 (Riemann 1893) は下方倍音列を導入した。和声二元論は長短二つの和音を鏡像の関係で捉えるという理論である。しかし、二元論は短三和音を長三和音と対等に扱うために、実在しない音響現象を必要としたのである。長三和音の鏡像が短三和音になるので理屈は整っていたが、下方倍音列は基音からは実際には発生していない。本稿は鏡像という着想を共有しつつ、反転の中心を三つに分ける点で異なる。

本稿は、この問いに対して音響ではなく組合せ的な答えを与える。実在しない現象を持ち出すことなく、長短二つの和音が対等に、かつ一意に定まることを示す。

##### 1.2. 着想

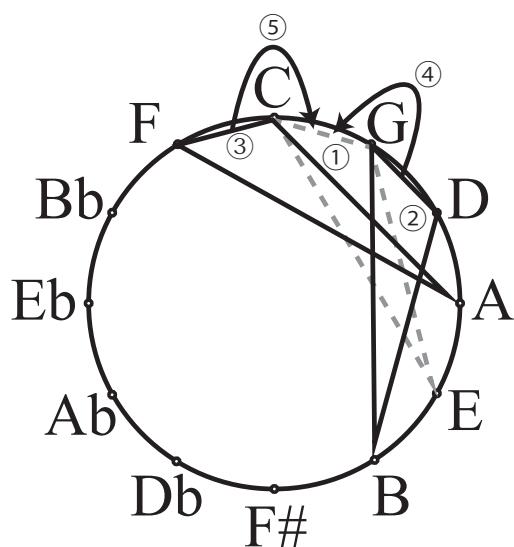
本研究の出発点はドミナントモーションの分析から始まる。五度圏は完全 5 度ずつ進む 12 点を円周上に等間隔に並べたもので、隣り合う点の隔たりは 30° にあたる（ここではピタゴラスのコンマについて議論しない）。五度圏上で三和音の構成音の点を繋ぐと三角形ができる。この三角形に着目すると、トニック  $I$  の両隣には、右に  $V$ 、左に  $IV$  が位置する<sup>3</sup>。ドミナントモーション  $V \rightarrow I$  は円周上を左へ 30° 進む動きであり、サブドミナントモーション  $IV \rightarrow I$  は右へ 30° 進む動きである。すなわち二つの進行は、トニックを挟んで互いに反対向きにトニックへ向かう。 $IV$  と  $V$  はトニックに関して対称の位置にある。図 1 は  $I$  を  $C$

<sup>1</sup> 基準音からの音の高さの隔たりを半音単位で測ったものを音差と呼ぶ。

<sup>2</sup> 音差反転を適用する際に対称の中心となるコード。

<sup>3</sup> 五度圏を時計回りに完全 5 度ずつ進む向きに描いた場合。

(Cメジャー)とした時、④がドミナントモーション、⑤がサブドミナントモーションであることを示している。図2はドミナントモーションと対称な和音進行であるサブドミナントモーションの五線譜である。



- ① Cmaj ④ ドミナントモーション  
② Gmaj ⑤ サブドミナントモーション  
③ Fmaj

図1: ドミナントモーションと対称な和音進行

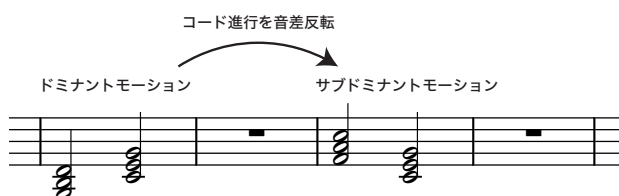


図2: ドミナントモーションと対称な和音進行の五線譜

ここから次の作業仮説を立てた。

“トニック三和音の第1音・第3音・第5音を、それぞれ独立した対称の中心とみなす。対象となる和音の各声部を、対応する中心に関して折り返すと、和声的に意味のある鏡像が得られるのではないか。”

本研究の眼目は中心を一つではなく三つ使う点にある。和声二元論では鏡の軸は一本であり、長三和音の鏡像は短三和音になる。反転操作の中心を三つの構成

音に分け、鏡像の操作を行うと結果が変わり、長三和音の鏡像は長三和音のままとなる。代わりに短三和音の鏡像が *sus4* となり、短音階では長三和音の鏡像が *sus2* となる (図3)。



図3: 音差反転の結果

## 2. 音差反転

### 2.1. 音差

本稿において、基準音からの音の高さの隔たりを半音単位で測ったものを音差と呼ぶ。音差を  $p$ 、基準音の周波数を  $f_0$ 、対象音の周波数を  $f$  とすれば  $p = 12 \log_2(f/f_0)$  である。12平均律の音は整数値に対応し、1が半音にあたる。

### 2.2. 根音ベクトルと構造ベクトル

三和音を構成する三つの音の音差を、低い順に  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  と書く。これを並べた列

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2, p_3), \quad p_1 < p_2 < p_3 \quad (1)$$

を和音ベクトルと呼ぶ。和音  $X$  のものであることを明示する場合は  $\mathbf{P}_X = (p_{X,1}, p_{X,2}, p_{X,3})$  と書く。本稿では三声がそれぞれ異なる高さをとる場合のみを扱い、同じ高さの重複は考えない。

和音ベクトルは以下の2つにカテゴライズし ( $\mathbf{R}$  と  $\mathbf{S}$ )、第1声部の高さを  $r = p_1$  とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (r, r, r), \\ \mathbf{S} &= \mathbf{P} - \mathbf{R} = (0, p_2 - r, p_3 - r) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{R}$  を根音ベクトル、 $\mathbf{S}$  を構造ベクトルと呼ぶ。定義から

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} + \mathbf{S} \quad (2)$$

が成り立ち、この分解は一意である。

$\mathbf{R}$  は和音全体を最低音の高さまで平行移動する量であり、 $\mathbf{S}$  は最低音を0に揃えたときの残りの声部の位置である。すなわち  $\mathbf{R}$  は和音がどこにあるかを、 $\mathbf{S}$  は

和音がどんな形かを表す。定義より  $S$  の第 1 成分は常に 0 である。

例えば、 $C$  を 0 (基準音) とすると、 $G$  (ソ・シ・レ) の三つの音の音差は 7、11、14 であるから

$$P = (7, 11, 14), \quad R = (7, 7, 7), \quad S = (0, 4, 7)$$

である。

ここで  $R$  は和音ではないことに注意する。 $G$  の  $R = (7, 7, 7)$  は「ソが三つ重なった和音」を表しているのではなく、和音全体を 7 半音持ち上げるという移動量である。実際に鳴る和音は  $P$  であり、 $R$  と  $S$  はそれを位置と形に分けた成分にすぎない。

以下で用いる基本的な構造ベクトルを挙げる。

$$S_M = (0, 4, 7), \quad S_m = (0, 3, 7), \\ S_{sus4} = (0, 5, 7), \quad S_{sus2} = (0, 2, 7)$$

$R$  を根音ベクトルと呼ぶのは、基本形では最低音が根音にあたるためである。転回形では両者は一致しないが、 $R$  が担うのは和音の位置であり、以下の議論は  $p_1$  の値のみに依存する。

## 2.3. 状態空間

本稿では和音を、最低音を基準に取り、他の二声がその上 1 オクターブの内側に置かれた具体的な配置として扱う。すなわち構造ベクトルに

$$0 = s_1 < s_2 < s_3 < 12 \quad (3)$$

を課し、これを満たす  $S$  を状態と呼ぶ。和音を音類の集合に潰さず、声部の高さの並びを保持するための規約である。

条件 (3) を満たす状態は、1 から 11 までの 11 個から  $s_2, s_3$  を選ぶ組合せの数だけあり、

$${}_{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

個である。以降の議論はすべて、この 55 個の有限な集合で行われる。

## 2.4. 転回

和音の転回、すなわち最低音を 1 オクターブ上げてあらためて低い順に並べ直す操作を  $\iota$  と書く。状態  $S = (0, a, b)$  に対して

$$\iota(0, a, b) = (0, b - a, 12 - a) \quad (4)$$

である。最低音 0 を 12 に移して  $(a, b, 12)$  とし、根音を  $a$  に取り直したものが右辺にあたる。 $\iota$  は条件 (3) を保つので、状態空間の上でつねに定義される。

転回の作用は、和音を音高の位置ではなく隣どうしの間隔で記述すると簡明になる。状態  $(0, a, b)$  の間隔列を

$$g = (a, b - a, 12 - b)$$

と定める。 $C$  ならば  $D \rightarrow M$  が 4、 $M \rightarrow F$  が 3、 $F \rightarrow C$  の  $D$  が 5 なので  $g = (4, 3, 5)$  である。三成分の和は常に 1 オクターブ、すなわち 12 である。

**補題 1** (転回は間隔列の巡回シフト).  $g = (g_1, g_2, g_3)$  のとき、 $\iota$  の操作をした後の写像の間隔列は  $(g_2, g_3, g_1)$  である。したがって  $\iota$  を 3 回続けて適用すると元の状態に戻る ( $\iota^3 = \text{id}$ )。

*Proof.*  $(0, a, b)$  の間隔列は  $(a, b - a, 12 - b)$  である。式 (4) より  $\iota(0, a, b) = (0, b - a, 12 - a)$  であり、その間隔列は  $(b - a, 12 - b, a)$  となる。これは元の列を左へ一つ巡回させたものに等しい。□

この見方では、間隔列の巡回同値類<sup>4</sup>が和音の種類を、その類の中でどの巡回位置にあるかが配置を表す。 $C = (0, 4, 7)$  の最低音を 1 オクターブ上げると  $M \cdot F \cdot C$  となり、間隔列は  $(4, 3, 5)$  から  $(3, 5, 4)$  へ移るが、巡回同値類は変わらない。すなわち転回は和音の種類を保ち、配置のみを変える<sup>5</sup>。

## 2.5. 帰属と境界条件

第 1 章の仮説では、トニック三和音の三つの構成音がそれぞれ独立した対称の中心となる。対象和音の各声部を折り返すには、どの声部がどの中心に対応するかが一意に決まっていなければならない。中心が三つある以上、これは自明ではない。

対応が曖昧になると操作は破綻する。構造ベクトル  $(0, 6, 7)$  を短三和音  $(0, 3, 7)$  の各音で折り返すと  $(0, 0, 7)$  となり、二つの声部が重なって和音を成さない。第 2 声部に対応する中心から離れすぎ、隣接する中心のほうに近い位置に来てしまうためである。

鏡となるトニック三和音の隣り合う構成音の間隔は、長三和音で 4 と 3、短三和音で 3 と 4 であり、最短で 3 である。各声部に対応する中心から離れてよい距離の上限を  $k$  とする。第  $i$  声部に対応する中心から距離  $k$  にあるとき、隣接する中心からの距離は最小で  $3 - k$  である。対応する中心のほうが厳密に近いためには  $k < 3 - k$ 、すなわち  $2k < 3$  が必要であり、整数値では  $k \leq 1$  となる。したがって上限として取りうる最大値は  $k = 1$ 、すなわち  $\pm 1$  である。

$k = 2$  では実際に破綻する。長三和音  $(0, 4, 7)$  を鏡とすると中心 4 と 7 は 3 離れているが、第 2 声部が 6

<sup>4</sup> 転回形を含むコードの集合

<sup>5</sup> 成分の多重集合だけでは種類は定まらない。長三和音  $(4, 3, 5)$  と短三和音  $(3, 4, 5)$  は多重集合  $\{3, 4, 5\}$  を共有するが、巡回同値類は異なる。

にあるとき、対応する中心 4 からは 2、隣接する中心 7 からは 1 であり、対応が逆転する。この判定は構造ベクトルに対して行う。根音の位置は形の問題ではないからである。すなわち

$$\|S_X - S_Y\|_\infty \leq 1 \quad (5)$$

と書ける。ここで  $\|\cdot\|_\infty$  は成分ごとの差の絶対値のうち最大のものを表す。以下ではこれを整合条件と呼ぶ。

## 2.6. 音差反転の公式

**定義 1** (音差反転). 対象和音  $X$  と、鏡の役割を果たす基準和音  $Y$  が整合条件 (5) を満たすとき、 $X$  の  $Y$  に関する音差反転を

$$P_{inv} = 2P_Y - P_X \quad (\|S_X - S_Y\|_\infty \leq 1) \quad (6)$$

で定める。整合条件を満たさないときは操作を実施しない。

整合条件は構造ベクトルについて判定し、反転の式は和音ベクトルに対して適用する。両者が別のベクトルを対象としていることは、以下で繰り返し用いる。整合条件は構造どうしの比較であり、根音の距離には何の制約も与えない。

式 (6) は、各声部を独立に折り返すことに他ならない。反転の結果を  $P_{inv} = (p_{inv,1}, p_{inv,2}, p_{inv,3})$  と書くと、成分ごとの操作は

$$p_{inv,i} = 2p_{Y,i} - p_{X,i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

となる。左辺は反転後の第  $i$  声部、右辺の  $p_{Y,i}$  は鏡の第  $i$  声部、 $p_{X,i}$  は対象和音の第  $i$  声部である。すなわち数直線上で  $p_{X,i}$  を点  $p_{Y,i}$  に関して点対称に写す式であり、これを三つの声部それぞれについて別々の中心で適用する。図 4 に例を示す。

対象和音  $X: C_{sus4} (0, 5, 7) \Rightarrow C_m$   
基準和音  $Y: C (0, 4, 7)$

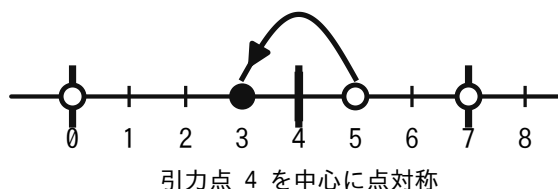


図 4: 音差反転の例。対象和音  $C_{sus4}$  の第 2 声部 5 が、基準和音  $C$  の第 2 声部 4 を中心に折り返されて 3 に写り、 $C_m$  が得られる

以降、構造ベクトルへの作用を  $R_Y(S_X)$  と書く。式 (6) は和音ベクトルに対する式であるが、第 2.8 節で示すように根音と構造は分けて計算でき、構造の側の写像は  $S_X \mapsto 2S_Y - S_X$  となる。 $R$  は反転 (reflection) の頭文字であり、添字  $Y$  は鏡を表す。構造だけを問題にするときは鏡の種類を添字にして  $R_M, R_m$  と書き、特定の調の鏡を明示するときは  $R_C$  のように和音名を添字にする。構造の側の写像は鏡の種類だけで決まるので、この二つの書き方は矛盾しない。なお、根音ベクトル  $R$  (太字) と反転作用素  $R_Y$  (斜体) は別のものである。前者は和音の位置を表すベクトル、後者は操作そのものを表す。

## 2.7. 公式の性質

第 2.5 節では、中心間隔 3 から  $\pm 1$  という値を導いた。本節では逆に、その  $\pm 1$  を使って別のことを示す。整合条件は、反転の結果がふたたび和音になることも保証している。

**補題 2** (反転の結果が和音になること). 基準和音の隣接する成分の間隔がいずれも 3 以上であるとき、整合条件を満たす任意の対象和音に対し、反転の結果は成分が小さい順に並んだままであり、二つの声部が同じ高さに重なることはない。

*Proof.* 鏡の第  $i$  声部と対象和音の第  $i$  声部のずれを  $\delta_i = s_{Y,i} - s_{X,i}$  とおく。整合条件は  $|\delta_i| \leq 1$  を意味する。反転の結果の第  $i$  成分を  $t_i$  と書けば

$$t_i = 2s_{Y,i} - s_{X,i} = s_{Y,i} + \delta_i$$

である。すなわち反転後の和音は、鏡の各音を  $\delta_i$  だけずらしたものである。隣り合う二成分の差は

$$t_{i+1} - t_i = (s_{Y,i+1} - s_{Y,i}) + (\delta_{i+1} - \delta_i)$$

となる。第 1 項は鏡の隣接成分の間隔であり、前提より 3 以上である。第 2 項は  $|\delta_i| \leq 1$  かつ  $|\delta_{i+1}| \leq 1$  より  $-2$  以上である。したがって

$$t_{i+1} - t_i \geq 3 - 2 = 1 > 0$$

がすべての  $i$  について成り立つ。

ここから二つの結論が同時に従う。各  $i$  で  $t_i < t_{i+1}$  が成り立つことは  $t_1 < t_2 < t_3$  に他ならず、これは成分が小さい順に並んでいることそのものである。よって並べ替えを要しない。また不等号が厳密であるから  $t_i \neq t_{i+1}$  であり、 $t_1 < t_3$  もこの連鎖から従うので  $t_1 \neq t_3$  である。よって二つの声部が同じ高さに重なることはない。差が 0 であれば重なりが生じ、負であれば順序が入れ替わるが、1 以上であることがその両方を排除している。□

要点は次の通りである。鏡の音どうしは少なくとも 3 離れている。反転は各声部を鏡の音から最大でも 1 しか動かさないで、隣り合う二声が互いに向かって動いても、間隔が狭まるのは  $1+1=2$  までである。 $3-2=1>0$  なので、二声が出会うことはない。この下限は反転そのものによって達成される。長三和音の転回  $\iota(0,4,7)=(0,3,8)$  を長三和音の鏡で反転すると  $(0,5,6)$  となり、第 2 声部と第 3 声部の間隔はちょうど 1 である。したがって  $\pm 1$  は余裕のある見積もりではない。

第 2.5 節の議論と数値が似ているが、意味は異なる。あちらの 2 は  $3-1$ 、すなわち隣接する中心までの距離であり、 $\pm 1$  という値を決めるために使われた。ここでの 2 は  $1+1$ 、すなわち二声が狭めあう量であり、 $\pm 1$  を前提として結論を導くために使われている。

長三和音  $(0,4,7)$  の間隔は 4,3,5、短三和音  $(0,3,7)$  の間隔は 3,4,5 であり、どちらも補題 2 の前提を満たす。

**補題 3** (二度かけると戻る). 整合条件を満たす限り  $R_Y(R_Y(S), S_X)$  である。

*Proof.*  $2S_Y - (2S_Y - S_X) = S_X$ . また像と基準和音の差は  $\|S_Y - S_X\|_\infty$  に等しいので、像も整合条件を満たし、ふたたび操作を適用できる。□

## 2.8. 根音と構造の分離

$r$  は和音の最低音の高さであった (第 2.2 節)。鏡の根音を  $r_Y$ 、対象和音の根音を  $r_X$  と書く。分解 (2) を式 (6) に代入すると

$$\begin{aligned} P_{inv} &= (r_{inv}, r_{inv}, r_{inv}) + (2S_Y - S_X), \\ r_{inv} &= 2r_Y - r_X \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。第 1 項は根音だけ、第 2 項は構造だけの計算であり、両者は干渉しない。補題 2 により第 2 項はふたたび小さい順に並び、第 1 成分は 0 のままである。したがって反転後の根音はちょうど  $2r_Y - r_X$ 、構造はちょうど  $2S_Y - S_X$  であり、根音の反転と構造の反転は分けて計算してよい。とくに構造の写像  $S_X \mapsto 2S_Y - S_X$  は鏡の構造だけで決まり、鏡がどの調にあるかに依存しない。鏡ごとに対応表を一度作れば、以後の反転は「根音を折り返し、構造を表から引く」という二段階の手続きになる (第 4 章)。

## 3. なぜ長三和音と短三和音なのか

### 3.1. 長短の鏡が生むもの

長三和音を鏡として短三和音を反転する。式 (8) により根音と構造は分けて扱えるので、以下では構造ベ

クトルだけを書く。

$$\begin{aligned} R_M(S_m) &= 2(0,4,7) - (0,3,7) \\ &= (0,5,7) = S_{sus4} \end{aligned}$$

同様に、短三和音を鏡として長三和音を反転すると

$$\begin{aligned} R_m(S_M) &= 2(0,3,7) - (0,4,7) \\ &= (0,2,7) = S_{sus2} \end{aligned}$$

となる。すなわち鏡の長短に応じて、長短二つの和音が  $sus2 \cdot sus4$  と対応する (図 5)。補題 3 より、逆向きに  $sus$  和音から長短三和音を得ることもできる。

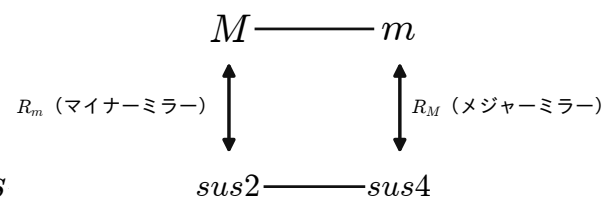


図 5:  $sus$  和音との双対関係。  $R_M$  は長三和音を鏡とする反転、  $R_m$  は短三和音を鏡とする反転を表し、  $R_M(m) = sus4$ 、  $R_m(M) = sus2$  である

**命題 1** (五度圏上の連続性). 55 個の配置のうち、五度圏上で連続する三点に写るものは  $sus$  の転回類に属する 3 個に限られる。

*Proof.* 五度圏上の位置は写像  $x \mapsto 7x \bmod 12$  で与えられる。各配置にこれを施して像を調べればよい。 $sus4 = (0,5,7)$  は  $\{11,0,1\}$  に、 $sus2 = (0,2,7)$  は  $\{0,1,2\}$  に、残る転回形  $(0,5,10)$  は  $\{10,11,0\}$  に写り、いずれも連続する。残る 52 個は連続しない。たとえば長三和音  $(0,4,7)$  の像は  $\{0,1,4\}$  である。なおこの写像は移高と可換であるから、連続するかどうかは根音の取り方に依存しない。□

**注意 1** ( $sus$  から見た長短).  $sus4$  と  $sus2$  は転回で互いに移り合う ( $\iota(0,5,7) = (0,2,7)$ )。命題 1 はこの二つを同じ転回類として扱っている。そのうえで反転を見ると、整合条件により  $sus4$  に作用するのは長三和音の鏡だけ、 $sus2$  に作用するのは短三和音の鏡だけである。

$$R_M(S_{sus4}) = S_m, \quad R_m(S_{sus2}) = S_M$$

すなわち、五度圏上で連続する唯一の和音類の二つの転回形から、互いに反対の鏡を通して短三和音と長三和音が現れる。本稿の出発点が五度圏上の対称性であっ

たこと（図 1）を踏まえると、長短の双対はこの対称性の像として読める。

### 3.2. 鏡になれる和音は四つしかない

補題 2 の前提は、鏡の隣接する二つの間隔が 3 以上であることを要求する。体系は転回を含むので、鏡の転回形もまた鏡として使えるべきである。転回は間隔列の巡回であるから（補題 1）、この要求を鏡のすべての転回形に課すことは、間隔列の三つの成分がいずれも 3 以上であることに等しい。これを課すと鏡の候補は大きく絞られる。

**命題 2** (鏡の候補). 間隔列の三つの成分がいずれも 3 以上である三和音は、移高と転回による同一視のもとで、減三和音・短三和音・長三和音・増三和音の四種類に限られる。すなわちこれらは三度を二つ積んだ和音であり、「三度堆積であること」は仮定ではなく間隔の条件から従う。

*Proof.* 三つの間隔の和は 1 オクターブすなわち 12 であり、各々が 3 以上である。3 以上の整数三つの和が 12 となる組合せは  $\{3, 3, 6\}$ 、 $\{3, 4, 5\}$ 、 $\{4, 4, 4\}$  の三通りしかない。これらはそれぞれ減三和音、長三和音および短三和音、増三和音に対応する。多重集合  $\{3, 4, 5\}$  は巡回の順序によって  $(3, 4, 5)$  と  $(3, 5, 4)$  の二類に分かれ、それぞれ短三和音と長三和音を与える。□

したがって鏡の候補は

$$\begin{aligned} \dim &= (0, 3, 6), & m &= (0, 3, 7), \\ M &= (0, 4, 7), & \text{aug} &= (0, 4, 8) \end{aligned}$$

の四つである。ではこの中でどの組を鏡とすべきか。

### 3.3. 自己整合性

四つの候補から二つ選ぶ組は六通りある。この中から鏡の組を選ぶには基準が要る。本稿は次の要請を置く。

**定義 2** (自己整合性). 鏡の組  $\{Y_1, Y_2\}$  が自己整合的であるとは、 $\text{sus}$  和音から出発してこの二つの鏡と転回を繰り返し適用したときに得られる和音の集合が、 $Y_1$  と  $Y_2$  の双方を含むことをいう<sup>6</sup>。

すなわち鏡として使う和音が、その鏡自身の作り出す体系の中に現れることを求める。鏡は体系を定義するために用いる和音である。その和音が体系の外側にあるならば、なぜその和音が鏡の資格をもつのかを体系の内部から説明できない。操作を体系の内側で閉じ

<sup>6</sup>  $\text{sus}$  の三つの転回形は転回で互いに移り合うから、どれから出発しても同じ集合が得られる。

させるというのがこの要請の内容であり、数学において構造を定める対象自身がその構造の要素であることを求めるのと同じ型の要請である。

**定理 1** (鏡の一意性). 命題 2 の四つから選ばれる六通りの組のうち、自己整合的であるのは長三和音と短三和音の組  $\{M, m\}$  のみである。

*Proof.* 有限計算による。結果を表 1 に示す。□

| 表 1: 鏡の組の自己整合性         |                       |
|------------------------|-----------------------|
| 鏡の組                    | 判定                    |
| $\{\dim, m\}$          | $m$ が体系に現れない          |
| $\{\dim, M\}$          | $M$ が体系に現れない          |
| $\{\dim, \text{aug}\}$ | $\text{aug}$ が体系に現れない |
| $\{m, M\}$             | 自己整合的                 |
| $\{m, \text{aug}\}$    | $\text{aug}$ が体系に現れない |
| $\{M, \text{aug}\}$    | $\text{aug}$ が体系に現れない |

$\{M, m\}$  が特別である理由は相互生成にある。整合条件を確認めると、 $\text{sus}4$  に作用できる鏡は  $M$  と  $\text{aug}$  のみ、 $\text{sus}2$  に作用できるのは  $\dim$  と  $m$  のみである。そして

$$R_M(\mathcal{S}_{\text{sus}4}) = \mathcal{S}_m, \quad R_m(\mathcal{S}_{\text{sus}2}) = \mathcal{S}_M$$

が成り立つ。すなわち長三和音が短三和音を生み、短三和音が長三和音を生む。二つの鏡が互いを生成するのはこの組に限られる。

この要請は、生成される体系の側を見ることでは代用できない。 $\{M, \text{aug}\}$  を鏡として  $\text{sus}$  和音から出発すると、 $\{M, m\}$  の場合とまったく同じ和音の集合が得られる。軌道は鏡の組の完全な不変量ではなく、この二つの組を区別しない。両者を分けるのは、 $M$  と  $m$  が自らの生む集合の中に現れるのに対し  $\text{aug}$  は現れないという一点であり、これはまさに自己整合性が見ている情報である。

**注意 2.** 鏡をあらかじめ選ばず、体系に現れた和音のうち条件を満たすものを自動的に鏡とする定式化では、 $\text{sus}$  和音から生成される集合は  $\text{sus}$  の三つの転回形だけで止まる。 $\text{sus}$  和音の間隔列はいずれも 2 を含み鏡になれないため、系は動かない。鏡は外から一つ導入する必要があり、定理 1 はその選択が一意であることを述べている。

## 4. 調の中での振る舞いと応用

### 4.1. 計算の手順

第 2.8 節の分解により、鏡が長三和音か短三和音かを決めれば、構造の側の対応は一意に定まる。整合条件を満たす構造をすべて挙げると表 2 を得る。

表 2: 構造の対応表。鏡の構造だけで決まり、鏡がどの調にあるかには依存しない。「—」は整合条件を満たさず反転が定義されないことを表す

| 対象の構造           | 鏡が長三和音          | 鏡が短三和音          |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| $M(0, 4, 7)$    | $M(0, 4, 7)$    | $sus2(0, 2, 7)$ |
| $m(0, 3, 7)$    | $sus4(0, 5, 7)$ | $m(0, 3, 7)$    |
| $sus4(0, 5, 7)$ | $m(0, 3, 7)$    | —               |
| $sus2(0, 2, 7)$ | —               | $M(0, 4, 7)$    |
| $dim(0, 3, 6)$  | $(0, 5, 8)$     | $(0, 3, 8)$     |

$(0, 5, 8)$  は短三和音の第 2 転回、 $(0, 3, 8)$  は長三和音の第 1 転回である。長三和音は長三和音の鏡で、短三和音は短三和音の鏡で、それぞれ動かない。

したがって反転は次の二段階になる。

1. 根音を鏡の根音に関して折り返す。 $r_X \mapsto 2r_Y - r_X$ 。
2. 構造を表 2 から引く。

たとえば鏡を  $E\flat$  (根音 3) とし、 $Fm$  (根音 5、構造  $m$ ) を反転する。根音は  $2 \cdot 3 - 5 = 1$  すなわち  $D\flat$  に写り、構造は表より  $sus4$  となる。よって  $D\flat sus4$  である。この二段階は暗算でたどれる。

## 4.2. ダイアトニック和音の反転

調内のダイアトニック三和音は、長調・短調いずれも整合条件を満たす (表 3)。

表 3: ダイアトニック三和音をトニックで反転した結果

| ハ長調 (鏡 $C$ ) |                         | ハ短調 (鏡 $Cm$ ) |                       |
|--------------|-------------------------|---------------|-----------------------|
| 度数           | 結果                      | 度数            | 結果                    |
| I $C$        | $C$                     | I $Cm$        | $Cm$                  |
| II $Dm$      | $B\flat sus4$           | II $Ddim$     | $B\flat(1 \text{ 転})$ |
| III $Em$     | $A\flat sus4$           | III $E\flat$  | $Asus2$               |
| IV $F$       | $G$                     | IV $Fm$       | $Gm$                  |
| V $G$        | $F$                     | V $Gm$        | $Fm$                  |
| VI $Am$      | $E\flat sus4$           | VI $A\flat$   | $Esus2$               |
| VII $Bdim$   | $D\flat m(2 \text{ 転})$ | VII $B\flat$  | $Dsus2$               |

長調では下屬和音と属和音がちょうど入れ替わる。 $R_C(F) = G$  かつ  $R_C(G) = F$  が成り立つ。序論で出発点とした「ドミナントモーションと対称な動きがサブドミナントモーションである」という観察が、操作の水準でそのまま現れている。根音の写像  $r_X \mapsto 2r_Y - r_X$  は、半音の数直線上で見ても五度圏上で見ても同じ折り返しになる。

## 4.3. 楽曲への応用

和声的に意味のある鏡像が得られる音差反転を曲中のコード進行に適用したら、新たなコード進行が生成

され、表現方法の一種になるのではないか。音差反転を実際の作曲に用いた。二つの原型の進行を、それぞれの調のトニックを鏡として反転し、得られた進行を曲に組み込んだ (精木 2026)。結果を表 4 に示す。

表 4: 制作に用いた進行とその音差反転。進行 B の  $G$  は和声的短音階に由来する

| 進行 A (変ホ長調、鏡は $E\flat$ ) |               |
|--------------------------|---------------|
| 原型                       | 反転後           |
| $A\flat$ (IV)            | $B\flat$      |
| $Fm$ (II)                | $D\flat sus4$ |
| $Cm$ (VI)                | $G\flat sus4$ |
| $B\flat$ (V)             | $A\flat$      |
| 進行 B (ハ短調、鏡は $Cm$ )      |               |
| 原型                       | 反転後           |
| $Cm$ (I)                 | $Cm$          |
| $B\flat$ (VII)           | $Dsus2$       |
| $Fm$ (IV)                | $Gm$          |
| $G$ (V)                  | $Fsus2$       |

ここに第 4.2 節で述べた性質が具体的に現れている。進行 A では  $A\flat$  (IV) と  $B\flat$  (V) が互いに入れ替わり、進行 B でも  $Fm$  (IV) が  $Gm$  (V) へ写っている。下屬和音と属和音の交換が、実際の進行の上で起きている。

また進行 B の  $Cm$  は鏡そのものであるため不動点となり、反転しても変化しない。同じ進行の  $G$  は和声的短音階に由来する和音であるが、構造ベクトルが  $Cm$  の近傍にあるため整合条件を満たし、 $Fsus2$  へ写る。

音差反転を適用した進行は、明確な調性をもたず  $sus$  和音を多く含むにもかかわらず、聴感上は破綻せずに機能した。ただし本節の記述は制作上の観察であり、統制された評価ではない。

## 5. 結論

本稿は、トニック三和音の各構成音を独立した対称の中心とする和音の折り返し操作を定義し、その性質を調べた。三度堆積の四種類のうち自己整合的な鏡の組が長短二つの和音に限られること (定理 1) を示した。和声二元論が短三和音を長三和音と対等に扱うために実在しない下方倍音列を要したのに対し、本稿の構成は組合せ的な議論のみで両者を対等に扱う。しかも長短の組は前提として置いたものではなく、自己整合性の要請から一意に導かれる。すなわち本稿は、長三和音と短三和音が特別であることに対して、歴史的偶然にもよらない形式的な必然性を与える。

今後の課題を三つ挙げる。第一に、音差反転と転回によって生成される和音がちょうど 15 個で閉じることの証明である。これはすでに検証済みであり、別稿にまとめる。第二に、聴取実験による検証である。本稿が示したのは形式的な構造であり、人の聴覚がこの操作に相当する処理を行っているかどうかは未検証で

ある。第三に、音差反転を DAW 上で自動的に適用できるプラグインの開発である。鏡となるトニックを指定すれば進行全体の反転が得られる形にすれば、作曲の現場で試行を重ねられるようになり、聴感上の妥当性についての知見も蓄積できる。



この作品は、クリエイティブ・コモンズの表示 - 非営利 - 改変禁止 4.0 国際 ライセンスで提供されています。ライセンスの写しをご覧になるには、<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/> をご覧頂くか、Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA までお手紙をお送りください。

## 6. 参考文献

Rameau, Jean-Philippe. 1737. *Génération harmonique, ou Traité de musique théorique et pratique*. Paris: Prault fils.

Riemann, Hugo. 1893. *Vereinfachte Harmonielehre oder die Lehre von den tonalen Funktionen der Akkorde*. London: Augener.

## 7. 参考作品

精木 禅. 2026.『三世一念』音差反転を用いて制作した楽曲. <https://youtu.be/GR7Pf6HPU0Y> (2026 年 9 月 25 日取得).

## 8. 著者プロフィール

### 精木 禅 (Zen ABEKI)

2004 年生まれ、横浜出身。シンガーソングライター。独自の音楽理論「音楽力学」を構築し、自作曲へ応用している。

### 横山 真男 (Masao YOKOYAMA)

1973 年広島生まれ、東京と埼玉で育つ。子供のころからヴァイオリンとチェロを学び編曲や作曲にも興味を持つ。早稲田大学で情報学の修士を経て東洋大学で工学博士を取得。作曲を久留智之氏に師事。現在、東京の明星大学教授として、コンピュータや数理、AI を取り入れた音楽やマルチメディア作品の制作と研究に従事している。作風は実験的音楽とクラシック音楽と日本伝統音楽のハイブリッド。作品はユニバーサル・エディション(ウィーン)、ムジカ・ジョイア(チェコ)、ヤマハミュージックメディア、ホッタガクフなどから出版され、これまでにプロフェッショナルから愛好家までまで幅広く演奏家によって演奏されている。Vienna Classical Music Academy 作曲コンクール 2025 第一位など国際コンクールで入賞・入選。著書には『やさしい音と音楽のプログラミング』(森北出版)『科学で読み解くクラシック音楽入門』(技術評論社)がある。先端芸術音楽創作学会、日本現代音楽協会、日本音響学会、情報処理学会など各会員。